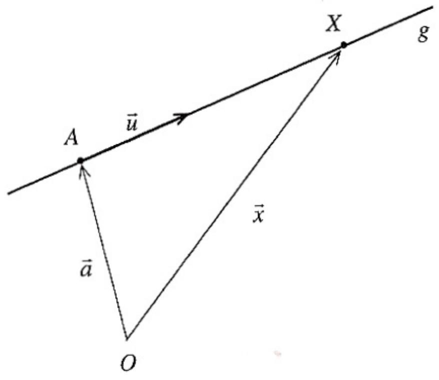
Gleichungen von Geraden

Die Flugbahn eines Flugzeugs kann durch eine Gerade g, die durch einen Punkt A und eine Richtung $\vec{u}$ festgelegt ist, beschrieben werden (siehe Skizze).
Für jeden weiteren Punkt X der Geraden g gilt dann:
$\overrightarrow{AX}$ ist ein Vielfaches des Richtungsvektors $\vec{u}$, d.h. $\overrightarrow{AX} = \lambda \cdot \vec{u}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.



(1) Punkt-Richtungs-Form der Geraden:

Die Gleichung $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Parametergleichung der Geraden g. Der Ortsvektor $\vec{a}$ zum Aufhängepunkt A heißt Stützvektor, der Vektor $\vec{u}$ Richtungsvektor der Geraden.

Schreibweise: $g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$

(2) Zwei-Punkte-Form der Geraden:

Eine Gerade ist auch durch die Angabe zweier verschiedener Punkte A und B eindeutig festgelegt. Der Richtungsvektor der Geraden g kann z.B. durch den Vektor $\overrightarrow{AB}$ bestimmt werden.

Schreibweise: $g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a})$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beispiel:
Stellen Sie die vektorielle Gleichung einer Geraden g auf, die durch die Punkte A(-7/3/4) und B(2/-8/5) festgelegt ist.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Besondere Geraden:

(a) Ursprungsgeraden:

Einfachste Form: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+k\cdot\vec{u}$ zum Beispiel: $g:\vec{x}=k\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

Auch möglich: wähle statt (0/0/0) als Aufhängepunkt einen Punkt, der auf g liegt

zum Beispiel P(2/-4/6) $\Rightarrow g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

Folgerung:

Bei Ursprungsgeraden sind die Koordinaten des Aufhängepunktes ein Vielfaches des Richtungsvektors.

(b) Gleichungen der Koordinatenachsen:

x_1- Achse: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow g:\vec{x}=k\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

x_2- Achse: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow g:\vec{x}=k\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

x_3- Achse: $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow g:\vec{x}=k\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Lage eines Punktes bezüglich einer Geraden:

Prüfen Sie, ob der Punkt P(1/-4/3) auf der Geraden $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ liegt.

$$\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}(I)\ \ 1=2+k & & k=-1 & \\ (II)\ \ -4=-1+3k & \Rightarrow & k=-1 & \Rightarrow P\notin g\\ (III)\ \ 3=5-2k & & k=1 & \end{matrix}$$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die vektorielle Geradengleichung g, die durch die Punkte A(-1/6/2) und B(5/0/5) festgelegt ist und untersuchen Sie dann, ob die Punkte P(11/-6/8) und Q(5/2/5) auf der Geraden g liegen.

2. Prüfen Sie, ob die Punkte A(0/1/2), B(-1/0/-1) und C(2/-1/0) auf einer Geraden liegen.

3. Prüfen Sie, ob es Zahlen $k \in \mathbb{R}$ gibt, dass die drei Punkte A(1/2/3), B(2/k/0) und C(1/1/1) auf einer Geraden liegen.

4. Geben Sie jeweils eine Parametergleichung für die Gerade g an.
   a) g schneidet die x_3-Achse im Punkt A(0/0/4) sowie die x_1-x_2-Ebene im Punkt B(-3/3/0).

   b) g geht durch A(4/3/0) und ist orthogonal zu der x_1-x_2-Ebene.

   c) g verläuft durch den Punkt A(0/0/3) und ist parallel zur Winkelhalbierenden der x_1-x_2-Ebene.

Lösungen:

1.

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\6\\2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\6\\2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}11\\-6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\6\\2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow k=6\ \Rightarrow P\in g$$

$$\begin{pmatrix}5\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\6\\2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\ \Rightarrow Q\notin g$$

2.

Gerade durch die Punkte A und B aufstellen:

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

Prüfen, ob C auf der Geraden g liegt:

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}\ \Rightarrow C\notin g$$

$\Rightarrow$ Die Punkte A, B und C bilden ein Dreieck

3.

Gerade durch A und C aufstellen:

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2\\k\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}\quad\text{aus (I) folgt: } 2=1\ \Rightarrow B\notin g \text{ für alle k}$$

4a) $$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}+k\cdot\left[\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right]\ \Rightarrow g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\-4\end{pmatrix}$$

4b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$