

Goniometrische Gleichungen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $[0; 2\pi]$ mit Hilfe der folgenden Beispiele.

$$\sin x = 0,54 \quad \Rightarrow x_1 \approx 0,57 \quad x_2 = \pi - 0,57 \approx 2,57$$

$$\sin x = -0,76 \quad \Rightarrow x_1 \approx -0,86 + 2\pi \approx 5,42 \quad x_2 \approx \pi - (-0,86) \approx 4,00$$

$$\cos x = 0,564 \quad \Rightarrow x_1 \approx 0,97 \quad x_2 = 2\pi - 0,97 \approx 5,31$$

$$\cos x = -0,652 \quad \Rightarrow x_1 \approx 2,28 \quad x_2 = 2\pi - 2,28 \approx 4,00$$

a) $\sin x = 0,435$

b) $\sin x = -0,581$

c) $\sin x = -\frac{1}{3}\sqrt{2}$

d) $\cos x = 0,45$

e) $\cos x = -0,381$

f) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Lösungen:

1a) $x_1 \approx 0,45$ $x_2 \approx \pi - 0,45 \approx 2,69$

1b) $x_1 \approx -0,62 + 2\pi \approx 5,66$ $x_2 \approx \pi - 5,66 \approx -2,52 \Rightarrow x_2 \approx -2,52 + 2\pi \approx 3,76$

1c) $x_1 \approx -0,49 + 2\pi \approx 5,79$ $x_2 \approx \pi - 5,79 \approx -2,65 \Rightarrow x_2 \approx -2,65 + 2\pi \approx 3,63$

1d) $x_1 \approx 1,10$ $x_2 \approx 2\pi - 1,10 \approx 5,18$

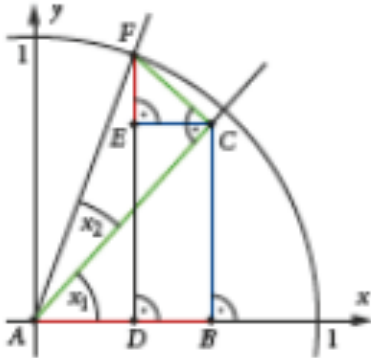
1e) $x_1 \approx 1,96$ $x_2 \approx 2\pi - 1,96 \approx 4,32$

1f) $x_1 \approx 2,62$ $x_2 \approx 2\pi - 2,62 \approx 3,66$

Man kann goniometrische Gleichungen nicht immer direkt auflösen.
Dann helfen Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen, die sogenannten Additionstheoreme.

Beispiel: $\sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) + \cos(x_1) \cdot \sin(x_2)$

Beweis mithilfe des Einheitskreises:



$$|\overline{DF}| = |\overline{DE}| + |\overline{EF}|$$

$$\text{Im Dreieck ADF gilt: } |\overline{DF}| = \sin(x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow \sin(x_1 + x_2) = |\overline{DE}| + |\overline{EF}|$$

$$\text{Im Rechteck BCED gilt: } |\overline{DE}| = |\overline{BC}|$$

$$\Rightarrow \sin(x_1 + x_2) = |\overline{BC}| + |\overline{EF}|$$

$$\text{Im Dreieck ABC gilt: } \sin(x_1) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} \Rightarrow |\overline{BC}| = \sin(x_1) \cdot |\overline{AC}|$$

$$\Rightarrow \sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1) \cdot |\overline{AC}| + |\overline{EF}|$$

$$\text{Im Dreieck ACF gilt: } \cos(x_2) = \frac{|\overline{AC}|}{1} \Rightarrow |\overline{AC}| = \cos(x_2)$$

$$\Rightarrow \sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) + |\overline{EF}|$$

Wegen $\overline{CE} \perp \overline{BC}$ und $\overline{CF} \perp \overline{AC}$ ist das Dreieck CFE
ähnlich zum Dreieck ABC und damit $\sphericalangle EFC = x_1$

$$\Rightarrow \text{Im Dreieck CFE gilt: } \cos(x_1) = \frac{|\overline{EF}|}{|\overline{CF}|} \Rightarrow |\overline{EF}| = \cos(x_1) \cdot |\overline{CF}|$$

$$\Rightarrow \sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) + \cos(x_1) \cdot |\overline{CF}|$$

$$\text{Im Dreieck ACF gilt: } \sin(x_2) = \frac{|\overline{CF}|}{1} \Rightarrow |\overline{CF}| = \sin(x_2)$$

$$\Rightarrow \sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) + \cos(x_1) \cdot \sin(x_2)$$

Für alle Winkel x , x_1 und x_2 gilt entsprechend:

1) $\sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) + \cos(x_1) \cdot \sin(x_2)$

2) $\cos(x_1 + x_2) = \cos(x_1) \cdot \cos(x_2) - \sin(x_1) \cdot \sin(x_2)$

3) $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$

4) $\cos(2x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = 2(\cos(x))^2 - 1$

5) $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$

6) $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

7) $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Beispiele:

1) Ermitteln Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $\sin(x) + \sin(2x) = 0$ aus dem Intervall $[0; 2\pi]$.

2) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $1 - \cos(2x) = 0$.

3) Ermitteln Sie die reellen Lösungen der Gleichung $\sin(x) = \cos(x)$.

4) Lösen Sie die Gleichung $\sin(x) - \cos(2x) = 0$.

Lösungen:

1)

$$\sin(x) + \sin(2x) = 0 \Rightarrow \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(x)(1 + 2\cos(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \pi \quad x_3 = 2\pi$$

$$\Rightarrow 1 + 2\cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = -0,5 \Rightarrow x_4 = \frac{2}{3}\pi \quad x_5 = 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

2)

$$1 - \cos(2x) = 0 \Rightarrow \cos(2x) = 1$$

$$\text{Substitution: } z = 2x \Rightarrow \cos(z) = 1 \Rightarrow z = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Resubstitution: } 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \sin(x) = \cos(x) \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1 \Rightarrow \tan(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

4)

$$\sin(x) - \cos(2x) = 0 \Rightarrow \sin(x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \Rightarrow \sin x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x - (1 - \sin^2 x) + \sin^2 x = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\text{Substitution: } z = \sin x \Rightarrow 2z^2 + z - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 0,5 \quad z_2 = -1$$

$$\text{Resubstitution: } \sin x = 0,5 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Aufgaben zu den goniometrischen Gleichungen

1.0 Ermitteln Sie die Lösungsmenge der goniometrischen Gleichung im Intervall $[0; 2\pi]$.

1.1 $2 \sin(x) - \cos(2x) = 3$

1.2 $2 \sin(2x - 5) = 1$

1.3 $\sin(2x) \cdot \cos(x) = \sin(x)$

1.4 $1 - \cos(x) = \sin(x)$

2.0 Ermitteln Sie die Lösungsmenge der goniometrischen Gleichung.

2.1 $2(\sin(x))^2 + \sin(x) = 1$

2.2 $4 \sin(x) = 3 \cos(x)$

2.3 $(\tan(x))^2 + 2 \tan(x) - 1 = 0$

2.4 $2 \sin(x) - \tan(x) = 0$

2.5 $\sin(2x) + 2 \sin(x) = 0$

2.6 $2(\cos(x))^2 = 2 + \sin(2x)$

Lösungen

1.1

$$2 \sin(x) - [(\cos(x))^2 - (\sin(x))^2] = 3 \Rightarrow 2 \sin(x) - [1 - (\sin(x))^2 - (\sin(x))^2] = 3$$

$$\Rightarrow 2(\sin(x))^2 + 2 \sin(x) - 4 = 0$$

Substitution : $z = \sin(x)$

$$\Rightarrow 2z^2 + 2z - 4 = 0 \Rightarrow z_1 = 1 \quad z_2 = -2 < -1$$

$$\text{Resubstitution : } \sin(x) = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow L = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

1.2

$$\sin(2x - 5) = 0,5$$

$$2x - 5 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2,76$$

$$2x - 5 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 3,81 \Rightarrow L = \{2,76; 3,81\}$$

1.3

$$(2 \sin(x) \cdot \cos(x)) \cdot \cos(x) - \sin(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) \cdot (2(\cos(x))^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \pi \quad x_3 = 2\pi$$

$$\Rightarrow 2(\cos(x))^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\cos(x))^2 = 0,5 \Rightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{0,5}$$

$$\Rightarrow \cos(x) = -\sqrt{0,5} \Rightarrow x_4 = \frac{3\pi}{4} \quad x_5 = 2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \cos(x) = \sqrt{0,5} \Rightarrow x_6 = \frac{\pi}{4} \quad x_7 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

1.4

$$1 - \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \Rightarrow 1 - \left(\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \right) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \left(1 - \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \right) - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 2\pi$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x_3 = \frac{\pi}{2}$$

2.1

Substitution : $z = \sin(x)$

$$\Rightarrow 2z^2 + z - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 0,5 \quad z_2 = -1$$

Resubstitution :

$$\sin x = 0,5 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.2 $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan(x) = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 0,6435 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

2.3

Substitution : $z = \tan(x)$

$$\Rightarrow z^2 + 2z - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = -1 - \sqrt{2} \quad z_2 = -1 + \sqrt{2}$$

Resubstitution :

$$\tan(x) = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{8}\pi + k\pi$$

$$\tan(x) = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.4

$$2\sin(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0 \Rightarrow \sin(x) \left(2 - \frac{1}{\cos(x)} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow x_1 = k\pi$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{\cos(x)} = 0 \Rightarrow 2\cos(x) = 1$$

$$\Rightarrow \cos(x) = 0,5 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x_3 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.5

$$2\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x) = 0 \Rightarrow 2\sin(x)(\cos(x) + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow x_1 = k\pi$$

$$\Rightarrow \cos(x) = -1 \Rightarrow x_2 = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.6

$$2(1 - (\sin(x))^2) = 2 + 2\sin(x)\cos(x) \Rightarrow 2(\sin(x))^2 + 2\sin(x)\cos(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin(x)(\sin(x) + \cos(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow x_1 = k\pi$$

$$\Rightarrow \sin(x) + \cos(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1 = 0 \Rightarrow \tan(x) = -1 \Rightarrow x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$