Goniometrische Gleichungen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $[0;2\pi]$ mit Hilfe der folgenden Beispiele.

$$\sin x = 0{,}54 \qquad \Rightarrow x_1 \approx 0{,}57 \qquad x_2 = \pi - 0{,}57 \approx 2{,}57$$
$$\sin x = -0{,}76 \qquad \Rightarrow x_1 \approx -0{,}86 + 2\pi \approx 5{,}42 \qquad x_2 \approx \pi - (-0{,}86) \approx 4{,}00$$
$$\cos x = 0{,}564 \qquad \Rightarrow x_1 \approx 0{,}97 \qquad x_2 = 2\pi - 0{,}97 \approx 5{,}31$$
$$\cos x = -0{,}652 \qquad \Rightarrow x_1 \approx 2{,}28 \qquad x_2 = 2\pi - 2{,}28 \approx 4{,}00$$

a) sinx = 0,435 b) sinx = -0,581 c) $\sin x = -\frac{1}{3}\sqrt{2}$

d) cosx = 0,45 e) cosx = -0,381 f) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Lösungen:

1a) $x_1 \approx 0{,}45 \qquad x_2 \approx \pi - 0{,}45 \approx 2{,}69$

1b) $x_1 \approx -0{,}62 + 2\pi \approx 5{,}66 \qquad x_2 \approx \pi - 5{,}66 \approx -2{,}52 \;\Rightarrow x_2 \approx -2{,}52 + 2\pi \approx 3{,}76$

1c) $x_1 \approx -0{,}49 + 2\pi \approx 5{,}79 \qquad x_2 \approx \pi - 5{,}79 \approx -2{,}65 \;\Rightarrow x_2 \approx -2{,}65 + 2\pi \approx 3{,}63$

1d) $x_1 \approx 1{,}10 \qquad x_2 \approx 2\pi - 1{,}10 \approx 5{,}18$

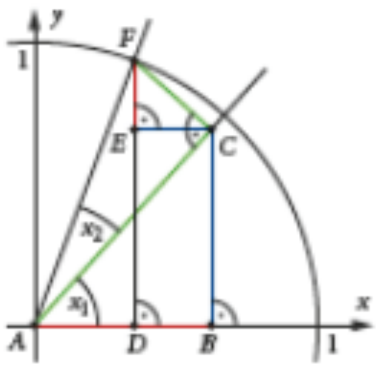
1e) $x_1 \approx 1{,}96 \qquad x_2 \approx 2\pi - 1{,}96 \approx 4{,}32$

1f) $x_1 \approx 2{,}62 \qquad x_2 \approx 2\pi - 2{,}62 \approx 3{,}66$

Man kann goniometrische Gleichungen nicht immer direkt auflösen.
Dann helfen Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen, die sogenannten Additionstheoreme.

Beispiel: $\sin\left(x_1 + x_2\right) = \sin(x_1)\cdot\cos(x_2) + \cos(x_1)\cdot\sin(x_2)$

Beweis mithilfe des Einheitskreises:



$\left|\overline{DF}\right| = \left|\overline{DE}\right| + \left|\overline{EF}\right|$

Im Dreieck ADF gilt: $\left|\overline{DF}\right| = \sin(x_1 + x_2)$

$\Rightarrow \sin(x_1 + x_2) = \left|\overline{DE}\right| + \left|\overline{EF}\right|$

Im Rechteck BCED gilt: $\left|\overline{DE}\right| = \left|\overline{BC}\right|$

$\Rightarrow \sin(x_1 + x_2) = \left|\overline{BC}\right| + \left|\overline{EF}\right|$

Im Dreieck ABC gilt: $\sin(x_1) = \dfrac{\left|\overline{BC}\right|}{\left|\overline{AC}\right|} \Rightarrow \left|\overline{BC}\right| = \sin(x_1)\cdot\left|\overline{AC}\right|$

$\Rightarrow \sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1)\cdot\left|\overline{AC}\right| + \left|\overline{EF}\right|$

Im Dreieck ACF gilt: $\cos(x_2) = \dfrac{\left|\overline{AC}\right|}{1} \Rightarrow \left|\overline{AC}\right| = \cos(x_2)$

$\Rightarrow \sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1)\cdot\cos(x_2) + \left|\overline{EF}\right|$

Wegen $\overline{CE} \perp \overline{BC}$ und $\overline{CF} \perp \overline{AC}$ ist das Dreieck CFE
ähnlich zum Dreieck ABC und damit $\measuredangle EFC = x_1$

$\Rightarrow$ Im Dreieck CFE gilt: $\cos(x_1) = \dfrac{\left|\overline{EF}\right|}{\left|\overline{CF}\right|} \Rightarrow \left|\overline{EF}\right| = \cos(x_1)\cdot\left|\overline{CF}\right|$

$\Rightarrow \sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1)\cdot\cos(x_2) + \cos(x_1)\cdot\left|\overline{CF}\right|$

Im Dreieck ACF gilt: $\sin(x_2) = \dfrac{\left|\overline{CF}\right|}{1} \Rightarrow \left|\overline{CF}\right| = \sin(x_2)$

$\Rightarrow \sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1)\cdot\cos(x_2) + \cos(x_1)\cdot\sin(x_2)$

Für alle Winkel x, x_1 und x_2 gilt entsprechend:

1) $\sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1)\cdot\cos(x_2) + \cos(x_1)\cdot\sin(x_2)$

2) $\cos(x_1 + x_2) = \cos(x_1)\cdot\cos(x_2) - \sin(x_1)\cdot\sin(x_2)$

3) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

4) $\cos(2x) = \left(\cos(x)\right)^2 - \left(\sin(x)\right)^2 = 2\left(\cos(x)\right)^2 - 1$

5) $\left(\sin(x)\right)^2 + \left(\cos(x)\right)^2 = 1$

6) $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

7) $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Beispiele:

1) Ermitteln Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $\sin(x) + \sin(2x) = 0$ aus dem Intervall $[0;2\pi]$.

2) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $1 - \cos(2x) = 0$.

3) Ermitteln Sie die reellen Lösungen der Gleichung $\sin(x) = \cos(x)$.

4) Lösen Sie die Gleichung $\sin(x) - \cos(2x) = 0$.

Lösungen:

1)

$$\sin(x)+\sin(2x)=0 \quad \Rightarrow \sin(x)+2\sin(x)\cos(x)=0$$
$$\Rightarrow \sin(x)\big(1+2\cos(x)\big)=0$$
$$\Rightarrow \sin(x)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=\pi \quad x_3=2\pi$$
$$\Rightarrow 1+2\cos(x)=0 \quad \Rightarrow \cos(x)=-0{,}5 \quad \Rightarrow x_4=\frac{2}{3}\pi \quad x_5=2\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$$

2)

$$1-\cos(2x)=0 \quad \Rightarrow \cos(2x)=1$$
$$\text{Substitution: } z=2x \quad \Rightarrow \cos(z)=1 \quad \Rightarrow z=2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$
$$\text{Resubstitution: } 2x=2k\pi \quad \Rightarrow x=k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

3) $\sin(x)=\cos(x) \quad \Rightarrow \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=1 \quad \Rightarrow \tan(x)=1 \quad \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

4)

$$\sin(x)-\cos(2x)-1=0 \quad \Rightarrow \sin(x)-\Big((\cos(x))^2-(\sin(x))^2\Big)-1=0$$
$$\Rightarrow \sin(x)-\Big(1-(\sin(x))^2-(\sin(x))^2\Big)-1=0$$
$$\Rightarrow 2(\sin(x))^2+\sin(x)-2=0$$
$$\text{Substitution: } z=\sin(x) \quad \Rightarrow 2z^2+z-2=0 \quad z_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{4} \quad z_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$$
$$\text{Resubstitution: } \sin(x)=\frac{-1+\sqrt{17}}{4} \quad \text{oder} \quad \sin(x)=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}<-1$$
$$\Rightarrow \sin(x)=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$
$$\Rightarrow x_1=0{,}8959+2k\pi \quad x_2=\pi-0{,}8959=2{,}2457+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

Aufgaben zu den goniometrischen Gleichungen

1.0 Ermitteln Sie die Lösungsmenge der goniometrischen Gleichung im Intervall $[0;2\pi]$.

1.1 $2\sin(x)-\cos(2x)=3$

1.2 $2\sin(2x-5)=1$

1.3 $\sin(2x)\cdot\cos(x)=\sin(x)$

1.4 $1-\cos(x)=\sin(x)$

2.0 Ermitteln Sie die Lösungsmenge der goniometrischen Gleichung.

2.1 $2(\sin(x))^2+\sin(x)=1$

2.2 $4\sin(x)=3\cos(x)$

2.3 $(\tan(x))^2+2\tan(x)-1=0$

2.4 $2\sin(x)-\tan(x)=0$

2.5 $\sin(2x)+2\sin(x)=0$

2.6 $2(\cos(x))^2=2+\sin(2x)$

Lösungen

1.1

$$2\sin(x)-\left[\left(\cos(x)\right)^2-\left(\sin(x)\right)^2\right]=3 \quad \Rightarrow 2\sin(x)-\left[1-\left(\sin(x)\right)^2-\left(\sin(x)\right)^2\right]=3$$

$$\Rightarrow 2\left(\sin(x)\right)^2+2\sin(x)-4=0$$

$$\text{Substitution: } \quad z=\sin(x)$$

$$\Rightarrow 2z^2+2z-4=0 \quad \Rightarrow z_1=1 \quad z_2=-2 \ <-1$$

$$\text{Resubstitution: } \sin(x)=1 \quad \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow L=\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

1.2

$$\sin(2x-5)=0{,}5$$

$$2x-5=\frac{\pi}{6} \ \Rightarrow x=2{,}76$$

$$2x-5=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow x=3{,}81 \quad \Rightarrow L=\{2{,}76;3{,}81\}$$

1.3

$$\left(2\sin(x)\cdot\cos(x)\right)\cdot\cos(x)-\sin(x)=0 \quad \Rightarrow \sin(x)\cdot\left(2\left(\cos(x)\right)^2-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \sin(x)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=\pi \quad x_3=2\pi$$

$$\Rightarrow 2\left(\cos(x)\right)^2-1=0 \quad \Rightarrow \left(\cos(x)\right)^2=0{,}5 \ \Rightarrow \cos(x)=\pm\sqrt{0{,}5}$$

$$\Rightarrow \cos(x)=-\sqrt{0{,}5} \quad \Rightarrow x_4=\frac{3\pi}{4} \quad x_5=2\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \cos(x)=\sqrt{0{,}5} \quad \Rightarrow x_6=\frac{\pi}{4} \quad x_7=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$$

1.4

$$1-\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow 1-\left(\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2-\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right)=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 1-\left(1-\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2-\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right)-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow 2\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0 \quad \Rightarrow 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)=0$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=2\pi$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0 \quad \Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right)=1 \quad \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow x_3=\frac{\pi}{2}$$

2.1

$\text{Substitution: } z = \sin(x)$

$\Rightarrow 2z^2 + z - 1 = 0 \quad \Rightarrow z_1 = 0{,}5 \quad z_2 = -1$

Resubstitution:

$$\sin x = 0{,}5 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\sin x = -1 \quad \Rightarrow x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

2.2 $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{3}{4} \quad \Rightarrow \tan(x) = \dfrac{3}{4} \quad \Rightarrow x = 0{,}6435 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

2.3

$\text{Substitution: } z = \tan(x)$

$\Rightarrow z^2 + 2z - 1 = 0 \quad \Rightarrow z_1 = -1 - \sqrt{2} \qquad z_2 = -1 + \sqrt{2}$

Resubstitution:

$$\tan(x) = -1 - \sqrt{2} \quad \Rightarrow x_1 = \frac{5}{8}\pi + k\pi$$

$$\tan(x) = -1 + \sqrt{2} \quad \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.4

$$2\sin(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0 \quad \Rightarrow \sin(x)\left(2 - \frac{1}{\cos(x)}\right) = 0$$

$\Rightarrow \sin(x) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = k\pi$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{\cos(x)} = 0 \quad \Rightarrow 2\cos(x) = 1$$

$$\Rightarrow \cos(x) = 0{,}5 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \Rightarrow x_3 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

2.5

$2\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x) = 0 \quad \Rightarrow 2\sin(x)\big(\cos(x) + 1\big) = 0$

$\Rightarrow \sin(x) = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = k\pi$

$\Rightarrow \cos(x) = -1 \quad \Rightarrow x_2 = \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

2.6

$2(1 - (\sin(x))^2) = 2 + 2\sin(x)\cos(x) \quad \Rightarrow 2(\sin(x))^2 + 2\sin(x)\cos(x) = 0$

$\Rightarrow 2\sin(x)(\sin(x) + \cos(x)) = 0$

$\Rightarrow \sin(x) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = k\pi$

$$\Rightarrow \sin(x) + \cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \tan(x) = -1 \quad \Rightarrow x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$