

Koordinatendarstellung eines Vektors bezüglich einer Basis

Beispiel:

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des \mathbb{R}^3 .

Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

Koordinatendarstellung eines Vektors bezüglich einer Basis

Beispiel:

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des \mathbb{R}^3 .

Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\text{(III)} \Rightarrow \lambda_3 = 4$$

$$\text{(II)} \Rightarrow -\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = -1$$

$$\text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \vec{a} - \vec{b} + 4 \cdot \vec{c}$$

\Rightarrow die Koordinaten des Vektors \vec{x} bezüglich der Basis lauten $(-2/-1/4)$

Aufgaben:

1) Die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des \mathbb{R}^3 (man nennt diese Basis auch die Standardbasis oder kanonische Basis).

Stellen Sie den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis dar.

2) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

b) Stellen Sie den Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis dar.

3) Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden

und stellen Sie gegebenenfalls den Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis dar.

Lösungen:

1)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 17, \lambda_3 = 7$$

$$\Rightarrow \vec{a} = 5 \cdot \vec{e}_1 + 17 \cdot \vec{e}_2 + 7 \cdot \vec{e}_3$$

2a)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

\Rightarrow das LGS ist eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

\Rightarrow die Vektoren bilden eine Basis des \mathbb{R}^3

2b)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 17 \\ 1 & -1 & -1 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right)$$

$$\text{(III)} \Rightarrow \lambda_3 = 2$$

$$\text{(II)} \Rightarrow 3 \cdot \lambda_2 - 3 \cdot \lambda_3 = 12 \Rightarrow \lambda_2 = 6$$

$$\text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 - 2 \cdot \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \Rightarrow \lambda_1 = 15$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix} = 15 \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c}$$

3)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(I) \quad 5 \cdot \lambda_1 = 10$$

$$(II) \quad \lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 + \lambda_3 = 5$$

$$(III) \quad \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_3 = 8$$

$$(I) \Rightarrow \lambda_1 = 2$$

$$(III) \Rightarrow 2 + 4 \cdot \lambda_3 = 8 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{3}{2}$$

$$(II) \Rightarrow 2 + 3 \cdot \lambda_2 + \frac{3}{2} = 5 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{d} = 2 \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b} + \frac{3}{2} \cdot \vec{c}$$