<u>Koordinatendarstellung eines Vektors bezüglich einer Basis</u>

<u>Beispiel:</u>

Die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

$$\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&0&1&2\\0&1&1&3\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&0&1\\0&1&1&3\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&0&1\\0&0&-1&-4\end{array}\right)$$

$(III)\Rightarrow\lambda_3=4$

$(II)\Rightarrow-\lambda_2=1\ \Rightarrow\lambda_2=-1$

$(I)\Rightarrow\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1\ \Rightarrow\lambda_1=-2$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=-2\cdot\vec{a}-\vec{b}+4\cdot\vec{c}$$

$\Rightarrow$ die Koordinaten des Vektors $\vec{x}$ bezüglich der Basis lauten (-2/-1/4)

Aufgaben:

1) Die Vektoren $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$ (man nennt diese Basis auch die Standardbasis oder kanonische Basis).

Stellen Sie den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis dar.

2) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Stellen Sie den Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis dar.

3) Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden

und stellen Sie gegebenenfalls den Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis dar.

4) Im $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ m \end{pmatrix}$ mit $m \in \mathbb{R}$ gegeben.

(Abitur 2010 BII)

a) Berechnen Sie, für welche Werte von m die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Stellen Sie für m = 5 den Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

Lösungen:

1)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 17,\ \lambda_3 = 7$

$\Rightarrow \vec{a} = 5 \cdot \overrightarrow{e_1} + 17 \cdot \overrightarrow{e_2} + 7 \cdot \overrightarrow{e_3}$

2a)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ die Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

2b)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 17 \\ 1 & -1 & -1 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right)$$

(III) $\Rightarrow \lambda_3 = 2$

(II) $\Rightarrow 3 \cdot \lambda_2 - 3 \cdot \lambda_3 = 12 \ \Rightarrow \lambda_2 = 6$

(I) $\Rightarrow \lambda_1 - 2 \cdot \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \ \Rightarrow \lambda_1 = 15$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix} = 15 \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c}$$

3)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(I) $5 \cdot \lambda_1 = 10$

(II) $\lambda_1 + 3 \cdot \lambda_2 + \lambda_3 = 5$

(III) $\lambda_1 + 4 \cdot \lambda_3 = 8$

(I) $\Rightarrow \lambda_1 = 2$

(III) $\Rightarrow 2 + 4 \cdot \lambda_3 = 8 \quad \Rightarrow \lambda_3 = \frac{3}{2}$

(II) $\Rightarrow 2 + 3 \cdot \lambda_2 + \frac{3}{2} = 5 \quad \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \vec{d} = 2 \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b} + \frac{3}{2} \cdot \vec{c}$

4a)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & m & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & m & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & m-4 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ für $k \neq 4$ ist das LGS eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$\Rightarrow$ für $k \neq 4$ bilden die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

4b)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & -11 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$\text{(III)} \Rightarrow \lambda_3 = -1 \quad \text{(II)} \Rightarrow \lambda_2 = 3 \quad \text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 = 2$

$\Rightarrow \vec{d} = 2 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} - \vec{c}$