Koordinatengleichung einer Ebene

Beispiel:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(I) $x_1 = 1 - \lambda + \mu$	(I) $-\lambda + \mu = x_1 - 1$
(II) $x_2 = -1 + \lambda - 2\mu$	(II) $\lambda - 2\mu = x_2 + 1$
(III) $x_3 = 3 + 2\lambda + 3\mu$	(III) $2\lambda + 3\mu = x_3 - 3$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x_1 - 1 \\ 1 & -2 & x_2 + 1 \\ 2 & 3 & x_3 - 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & -x_2 - x_1 \\ 0 & -5 & -x_3 - 2x_1 + 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & -x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & -7x_1 - 5x_2 - x_3 + 5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow E: -7x_1 - 5x_2 - x_3 + 5 = 0$$

Geht man von dieser vektoriellen Form zu den Koordinaten über, so ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem.

..

Bemerkung:

Das obige Verfahren ist aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Richtungsvektoren immer durchführbar.

Das Arbeiten mit der Koordinatengleichung einer Ebene erweist sich im Vergleich zur Parametergleichung in vielen Fällen (Punktprobe, Untersuchung von Lagebeziehungen) als einfacher.

Beispiel:

Ermitteln Sie, ob die Punkte A(0/1/3) und B(-1/-1/-1) in der Ebene $E: x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 9 = 0$ liegen.

$A(0/1/3)$ einsetzen: $0 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 9 = 0 \quad \Rightarrow 29 = 0$ (f) $\Rightarrow A \notin E$

$B(-1/-1/-1)$ einsetzen: $-1 + 2 \cdot (-1) + 6 \cdot (-1) + 9 = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0$ (w) $\Rightarrow B \in E$

Umwandlung einer Koordinatengleichung in eine Parametergleichung

Beispiel:

$E: 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$

1. Möglichkeit: Bestimmen von drei Punkten der Ebene E und dann E aufstellen

$x_1 = 0,\ x_2 = 0 \ \Rightarrow x_3 = 6 \ \ \Rightarrow P_1(0/0/6)$
$x_1 = 0,\ x_3 = 0 \ \Rightarrow x_2 = -3 \ \ \Rightarrow P_2(0/-3/0)$
$x_2 = 0,\ x_3 = 0 \ \Rightarrow x_1 = 2 \ \ \Rightarrow P_3(2/0/0)$

$$\Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right] + \mu \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right]$$

$$\Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. Möglichkeit: Parameterform als Lösung eines unterbestimmten Gleichungssystems

wähle $x_2 = \lambda,\ x_3 = \mu$

$\Rightarrow 3x_1 - 2\lambda + \mu - 6 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 2 + \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu$

$$\Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgaben:

1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene durch die Punkte A, B und C in der Koordinatenform.

a) A(-1/3/1), B(3/-4/1) und C(0/0/-1)

b) A(6/-2/1), B(-1/0/2) und C(0/0/1)

2 Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und der Punkt P(1/-1/0).

a) Weisen Sie nach, dass der Punkt P nicht auf der Geraden g liegt.

b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, die den Punkt P und die Gerade g enthält.

c) Untersuchen Sie, ob der Punkt Q(-2/-1/1) in der Ebene E liegt.

3 Die Gerade g besitzt den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und verläuft durch den Punkt P(1/-2/6), die Gerade h enthält die Punkte P und R(3/-2/7).

a) Begründen Sie, dass die Geraden g und h eine Ebene festlegen.

b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.

c) Überprüfen Sie, ob der Ursprung in dieser Ebene liegt.

4 Gegeben ist für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Ebenenschar $E_t: tx_1 - tx_2 + x_3 - 8 = 0$.
Prüfen Sie, ob die Punkte P(1/-7/9) und Q(12/12/8) zu Ebenen der Schar E_t gehören.

Lösungen:

$$1a)\ E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\left[\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\right]+\mu\left[\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\right]\ \Rightarrow E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-7\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

(I) $4\lambda+\mu=x_1+1$

(II) $-7\lambda-3\mu=x_2-3$

(III) $-2\mu=x_3-1$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}4&1&x_1+1\\-7&-3&x_2-3\\0&-2&x_3-1\end{array}\right)\ \Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}4&1&x_1+1\\0&-5&7x_1+4x_2-5\\0&-2&x_3-1\end{array}\right)\ \Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}4&1&x_1+1\\0&-5&7x_1+4x_2-5\\0&0&14x_1+8x_2-5x_3-5\end{array}\right)$$

$\Rightarrow E:14x_1+8x_2-5x_3-5=0$

$$1b)\ E:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\left[\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\-2\\1\end{pmatrix}\right]+\mu\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\-2\\1\end{pmatrix}\right]\ \Rightarrow E:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-7\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-6\\2\\0\end{pmatrix}$$

(I) $-7\lambda-6\mu=x_1-6$

(II) $2\lambda+2\mu=x_2+2$

(III) $\lambda=x_3-1$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}-7&-6&x_1-6\\2&2&x_2+2\\1&0&x_3-1\end{array}\right)\ \Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}-7&-6&x_1-6\\0&-2&-2x_1-7x_2-2\\0&6&-x_1-7x_3+13\end{array}\right)\ \Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}-7&-6&x_1-6\\0&-2&-2x_1-7x_2-2\\0&0&14x_1+42x_2+14x_3-14\end{array}\right)$$

$\Rightarrow E:14x_1+42x_2+14x_3-14=0\quad\Rightarrow E:x_1+3x_2+x_3-1=0$

$$2a)\ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{array}{l}(I)\ 1=2+\lambda\\(II)\ -1=-1+2\lambda\\(III)\ 0=4-2\lambda\end{array}\ \Rightarrow\ \begin{array}{l}(I)\ \lambda=-1\\(II)\ \lambda=0\\(III)\ \lambda=2\end{array}$$

$\Rightarrow P\notin g$

2b) $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}+\mu\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\right]\Rightarrow E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\0\\-4\end{pmatrix}$

(I) $\lambda-\mu=x_1-2$

(II) $2\lambda=x_2+1$

(III) $-2\lambda-4\mu=x_3-4$

$\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&x_1-2\\2&0&x_2+1\\-2&-4&x_3-4\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&x_1-2\\0&2&-2x_1+x_2+5\\0&-6&2x_1+x_3-8\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}4&1&x_1+1\\0&-5&7x_1+4x_2-5\\0&0&-8x_1+6x_2+2x_3+14\end{array}\right)$

$\Rightarrow E:-4x_1+3x_2+x_3+7=0$

2c) $Q(-2/-1/1)$ in E einsetzen: $-4\cdot(-2)+3\cdot(-1)+1+7=0\ \Rightarrow 13=0$ (f) $\Rightarrow Q\notin E$

3a) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\quad h:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}+\mu\left[\begin{pmatrix}3\\-2\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}\right]\Rightarrow h:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

g und h spannen eine Ebene auf, weil die Richtungsvektoren linear unabhängig sind und die Geraden den Punkt P gemeinsam haben.

3b) $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

(I) $-\lambda+2\mu=x_1-1$

(II) $0=x_2+2$

(III) $-\lambda+2\mu=x_3-6$

$\Rightarrow E:x_2+2=0$

3c) $P(0/0/0)$ in E einsetzen: $0+2=0\ \Rightarrow 2=0$ (f)

$\Rightarrow$ der Ursprung liegt nicht in der Ebene

4) $P(1/-7/9)$ in E_t einsetzen: $t+7t+9-8=0\ \Rightarrow 8t=-1\ \Rightarrow t=-\frac{1}{8}$

für $t=-\frac{1}{8}$ liegt der Punkt P auf der Ebene

$Q(12/12/8)$ in E_t einsetzen: $12t-12t+8-8=0\ \Rightarrow 0=0$

Q liegt für alle $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ in der Ebene