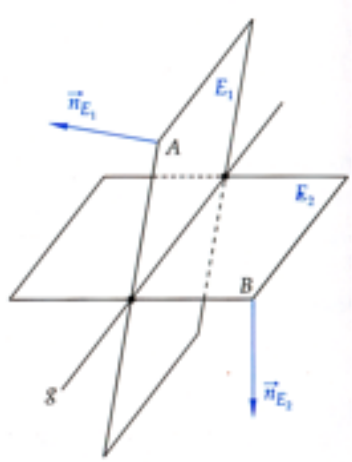
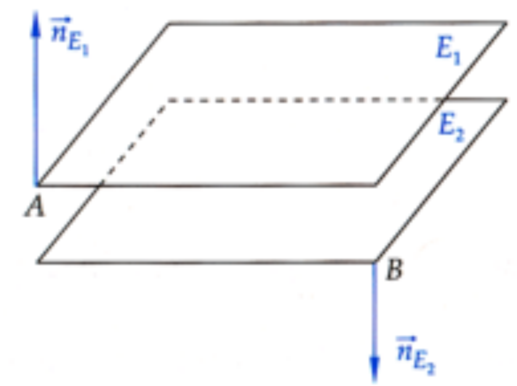
Lagebeziehung Ebene – Ebene

(1) Die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich



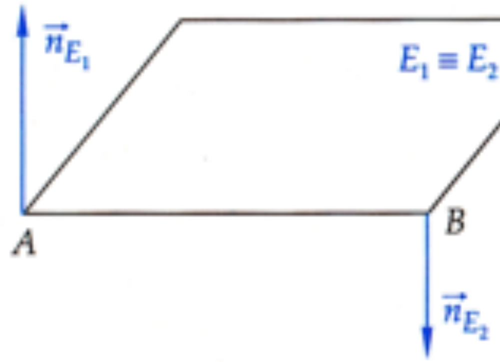
Die beiden Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 sind linear unabhängig.
Als Schnittgebilde ergibt sich eine Gerade g.

(2) Die Ebenen E_1 und E_2 sind echt parallel zueinander



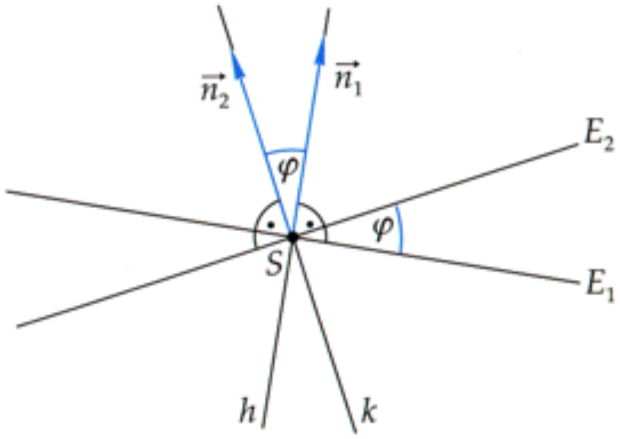
Die beiden Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 sind linear abhängig, aber ein beliebiger Punkt der Ebene E_1 liegt nicht in der Ebene E_2.

(3) Die Ebenen E_1 und E_2 sind identisch



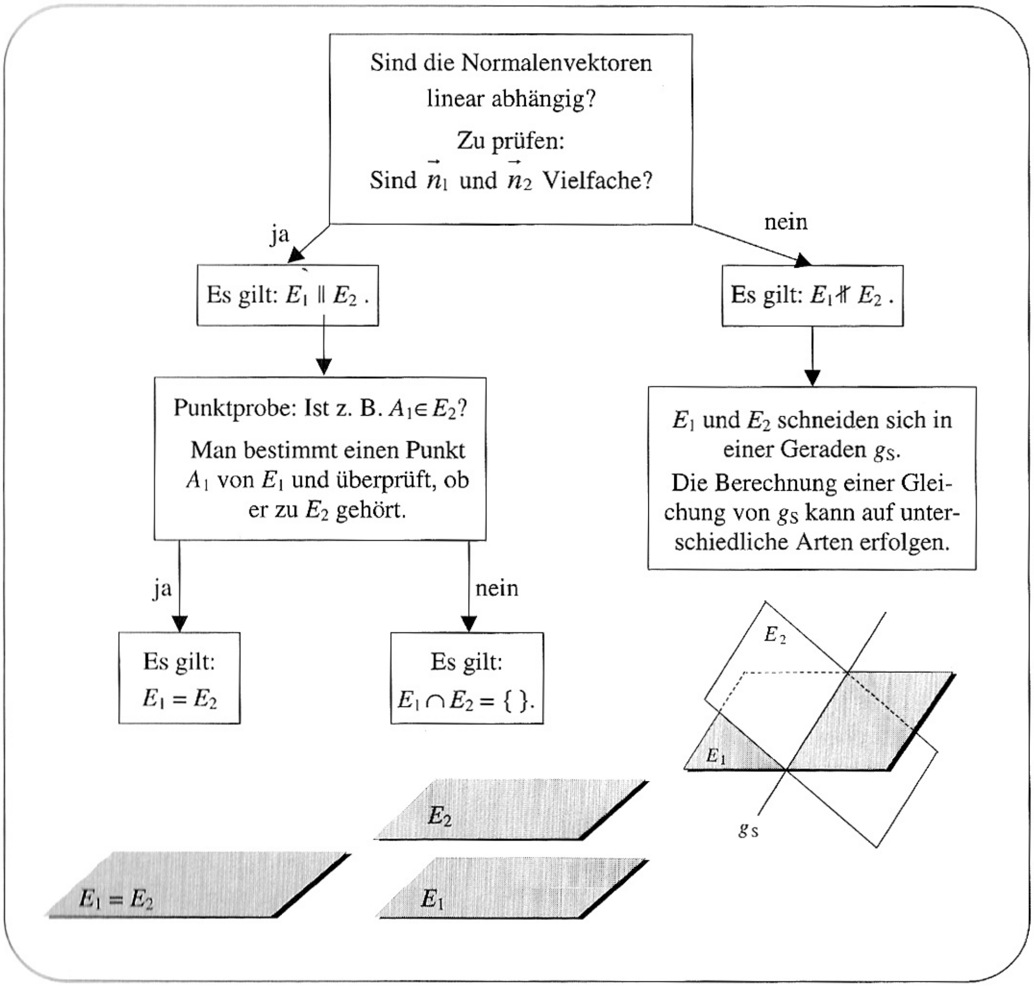
Die beiden Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 sind linear abhängig und ein beliebiger Punkt der Ebene E_1 liegt in der Ebene E_2.

Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2:



$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_{E_1}} \circ \overrightarrow{n_{E_2}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{E_1}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{E_2}}\right|} \quad \text{und } 0° < \varphi < 90°}$$

<u>Praktisches Vorgehen zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von zwei Ebenen:</u>



<u>Aufgaben:</u>

1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen
   $E_1: 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 25 = 0$ und $E_2: -4x_1 + 10x_2 - 6x_3 + 30 = 0$.

2. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen
   $E_1: 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 62 = 0$ und $E_2: 3x_1 - 4x_3 - 24 = 0$ und geben Sie gegebenenfalls die Gleichung der Schnittgeraden g an.

3. Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden der Ebene $E: -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 18 = 0$ mit der x_1-x_2-Koordinatenebene.

   <u>Bemerkung:</u>

   Die Schnittgerade einer Ebene mit einer Koordinatenebene heißt Spurgerade.

4. Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der Ebenen E_1 und E_2 und bestimmen Sie gegebenenfalls die Gleichung der Schnittgeraden.

a) $E_1: 3x_1 - 5x_2 + 12x_3 - 4 = 0$ und $E_2: -5x_1 + 7x_2 - 9x_3 + 6 = 0$

b) $E_1: -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 18 = 0$ und $E_2: 6x_1 - 10x_2 + 4x_3 - 36 = 0$

5.0 Gegeben sind die Ebenen E und F:

$E: -4x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 12$

$F: 3x_1 - 2x_2 = 5$

Entscheiden Sie, welche der Aussagen wahr sind (ohne Hilfsmittel).

5.1 Die Normalenvektoren der beiden Ebenen sind kollinear.

5.2 Der Punkt P(1/-1/3) liegt in der Ebene F, aber nicht in der Ebene E.

5.3 Der Punkt Q(-0,5/1/1) gehört zur Schnittmenge der beiden Ebenen.

5.4 E und F schneiden sich in einer Geraden.

5.5 Eine Spurgerade der Ebene E ist $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$.

6. Geben Sie eine Ebene in Parameterdarstellung an, die die Ebene

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s,t \in \mathbb{R}$ in der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$

schneidet (ohne Hilfsmittel).

Lösungen:

1.

$\overrightarrow{n_{E_1}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$ sind linear abhängig $\Rightarrow$ E_1 und E_2 sind identisch oder echt parallel

Bestimmung eines Punktes P der Ebene E_1 und einsetzen in E_2:

wähle z.B. $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$

$\Rightarrow -5x_2 + 25 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 5 \quad \Rightarrow P(0/5/0)$

P in E_2 einsetzen: $10 \cdot 5 + 30 = 0 \quad \Rightarrow 80 = 0 \quad \Rightarrow P \notin E_2$

$\Rightarrow E_1$ und E_2 sind echt parallel

2.

$\overrightarrow{n_{E_1}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$ sind linear unabhängig $\Rightarrow$ die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich

Bestimmung der Gleichung der Schnittgeraden g:

setze $x_3 = k$

(I) $4x_1 + x_2 + 3k - 62 = 0$

(II) $3x_1 - 4k - 24 = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = 8 + \frac{4}{3}k$

x_1 in (I): $4 \cdot (8 + \frac{4}{3}k) + x_2 + 3k - 62 = 0$

$\Rightarrow x_2 = 30 - \frac{25}{3}k$

$$\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{25}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -25 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.

$x_3 = 0 \qquad \Rightarrow -3x_1 + 5x_2 + 18 = 0$

setze $x_1 = k \qquad \Rightarrow -3k + 5x_2 + 18 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = -\frac{18}{5} + \frac{3}{5}k$

$$\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{18}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

4a)

$\overrightarrow{n_{E_1}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$ sind linear unabhängig $\Rightarrow$ die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich

Bestimmung der Gleichung der Schnittgeraden g:

setze $x_3 = k$

(I) $3x_1 - 5x_2 + 12k - 4 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3}x_2 - 4k + \frac{4}{3}$

(II) $-5x_1 + 7x_2 - 9k + 6 = 0$

x_1 in (II): $-5 \cdot (\frac{5}{3}x_2 - 4k + \frac{4}{3}) + 7x_2 - 9k + 6 = 0$

$\Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{33}{4}k$

$\Rightarrow x_1 = \frac{5}{3} \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{33}{4}k) - 4k + \frac{4}{3} \quad \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{39}{4}k$

$$\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{39}{4} \\ \frac{33}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 39 \\ 33 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4b)

$\overrightarrow{n_{E_1}}$ und $\overrightarrow{n_{E_2}}$ sind linear abhängig $\Rightarrow$ E_1 und E_2 sind identisch oder echt parallel

Bestimmung eines Punktes P der Ebene E_1 und einsetzen in E_2 :

wähle z.B. $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$

$\Rightarrow -3 + 5 - 2x_3 + 18 = 0 \quad \Rightarrow x_3 = 10 \quad \Rightarrow P(1/1/10)$

P in E_2 einsetzen: $6 - 10 + 40 - 36 = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0 \quad \Rightarrow P \in E_2$

$\Rightarrow E_1$ und E_2 sind identisch

5.1 Falsch. Die Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind offensichtlich nicht Kollinear.

5.2 Richtig.

5.3 Falsch. Die Schnittmenge der beiden Ebenen ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ -7 \end{pmatrix} \; s \in \mathbb{R}$.

Der Punkt Q liegt nicht auf dieser Geraden.

5.4 Richtig.

5.5 Falsch. Setzt man g in E ein, so ergibt sich, dass g und E einen eindeutigen Schnittpunkt haben, also kann g keine Spurgerade der Ebene sein.

6. $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s,t \in \mathbb{R}$