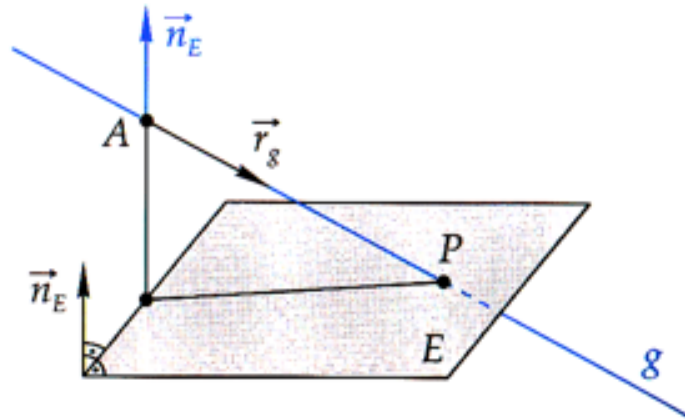


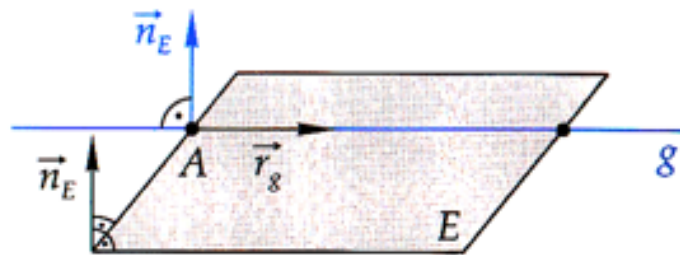
Lagebeziehung Gerade – Ebene

(1) Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich



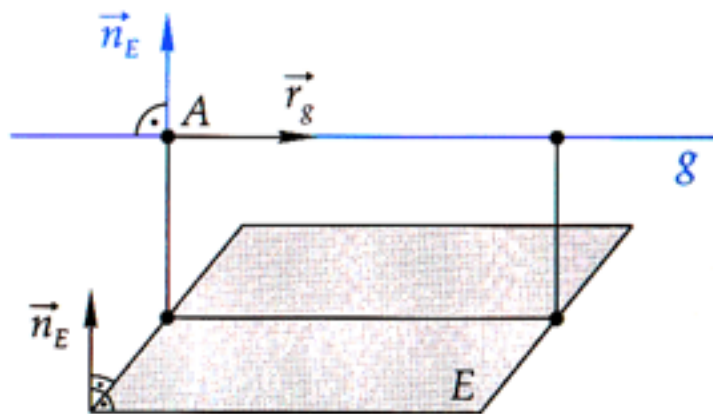
$\vec{n}_E \circ \vec{r}_g \neq 0$: Die Gerade g durchstößt die Ebene E in genau einem Punkt P.

(2) Die Gerade g liegt ganz in der Ebene E



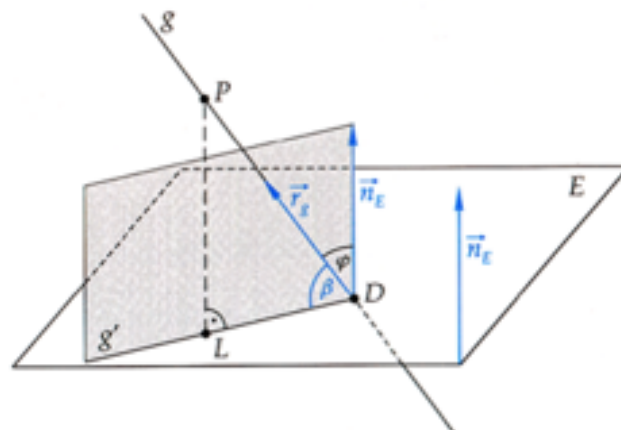
$\vec{n}_E \circ \vec{r}_g = 0$ und der Aufhängepunkt A der Geraden g ist auch ein Punkt der Ebene E.
 \Rightarrow Die Gerade g liegt ganz in der Ebene E.

(3) Die Gerade g ist echt parallel zur Ebene E



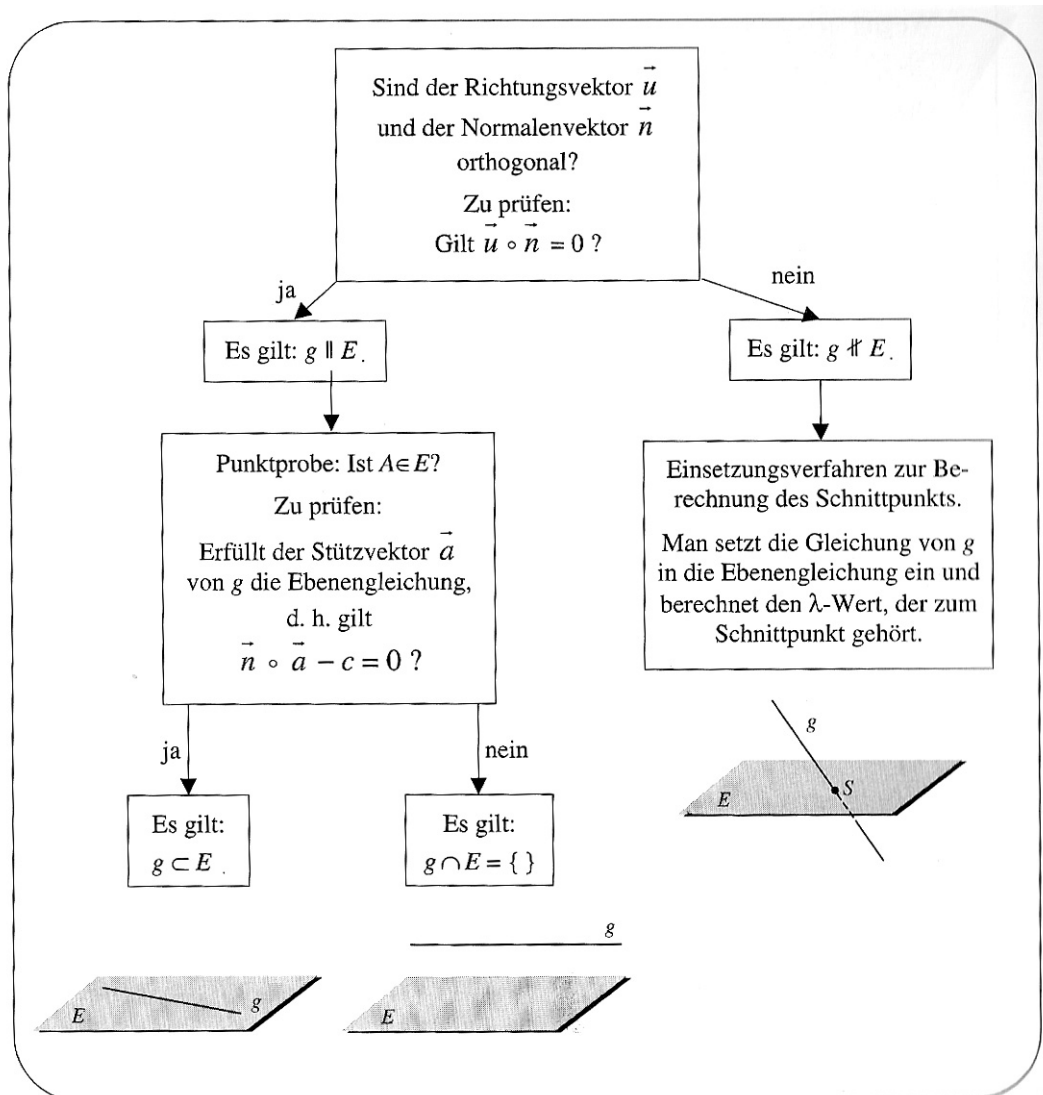
$\vec{n}_E \circ \vec{r}_g = 0$ und der Aufhängepunkt A der Geraden g liegt nicht in der Ebene E.
⇒ Die Gerade g verläuft in einem bestimmten Abstand parallel zur Ebene E.

Schnittwinkel zwischen einer Geraden g und einer Ebene E:



$$\sin \beta = \frac{|\vec{r}_g \circ \vec{n}_E|}{|\vec{r}_g| \cdot |\vec{n}_E|} \quad \text{und } 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

Praktisches Vorgehen zur Bestimmung der gegenseitigen Lage von Geraden und Ebenen:



Aufgaben:

1. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene

$E : 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 15 = 0$ und der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes an.

2. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene

$E : 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 20 = 0$ und der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene

$$E: -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 20 = 0 \text{ und der Geraden } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Bestimmen Sie die Maßzahl des Schnittwinkels zwischen der Ebene

$$E: 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 15 = 0 \text{ und der Geraden } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenebenen.

Bemerkung:

Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen heißen Spurpunkte.

6. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Ebene $E: 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 25 = 0$ mit den Koordinatenachsen.

7. Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der Geraden g und der Ebene E und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes an.

$$\text{a) } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } E: 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5 = 0 \text{ und } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8. Ermitteln Sie die Werte der Parameter a und b so, dass die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ in der Ebene $E: -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3 = 0$ liegt.

9.0 Die folgende Rechnung zeigt einen Teil der Untersuchung der Lagebeziehung einer Ebene E und einer Geraden g :

$$2(4+r) - 4(-2) + 3(3+2r) = 9 \Rightarrow 25 + 8r = 9 \Rightarrow 8r = -16$$

9.1 Geben Sie ohne weitere Rechnung die Lagebeziehung von g und E an.

9.2 Bestimmen Sie eine mögliche Geradengleichung von g sowie eine mögliche Ebenengleichung von E .

9.3 Ändern Sie die eine der Koordinaten der Geraden g so ab, dass g in der Ebene E liegt.

Lösungen:

1.

Einsetzen der Koordinatengleichungen von g in die Ebene E:

$$3 \cdot (-2 + 2t) - 4 \cdot (5 - 3t) + (3 + t) - 15 = 0$$

$$19t - 38 = 0 \Rightarrow t = 2$$

\Rightarrow die Gerade g und die Ebene E schneiden sich

Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow S(2/-1/5)$$

2.

$$2 \cdot (-2 - t) - (-4 + 2t) + 4 \cdot (5 + t) - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

\Rightarrow die Gerade g liegt ganz in der Ebene E

3.

$$-2 \cdot (-2 - t) + (3 + 2t) - 4 \cdot (-5 + t) + 20 = 0$$

$$\Rightarrow 47 = 0$$

\Rightarrow die Gerade g liegt echt parallel zur Ebene E

4.

$$\vec{r}_g \circ \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 + 12 + 1 = 19$$

$$|\vec{r}_g| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14} \quad |\vec{r}_E| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \frac{|19|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}} \approx 0,9959 \Rightarrow \beta \approx 84,79^\circ$$

5.

Schnittpunkt mit der $x_1 - x_2$ - Ebene: $x_3 = 0$

$$\Rightarrow 3 + 2k = 0 \Rightarrow k = -1,5 \Rightarrow S_1(2/2,5/0)$$

Schnittpunkt mit der $x_1 - x_3$ - Ebene: $x_2 = 0$

$$\Rightarrow 4 + k = 0 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow S_2(2/0/-5)$$

Schnittpunkt mit der $x_2 - x_3$ - Ebene: $x_1 = 0$

$$\Rightarrow 2 = 0 \Rightarrow \text{es gibt keinen Schnittpunkt mit der } x_2 - x_3 \text{ - Ebene}$$

6.

$$\text{Schnittpunkt mit der } x_1\text{-Achse: } g_1: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot k + 25 = 0 \Rightarrow k = -\frac{25}{2} \Rightarrow S_1(-\frac{25}{2} / 0 / 0)$$

$$\text{Schnittpunkt mit der } x_2\text{-Achse: } g_2: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -5 \cdot k + 25 = 0 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow S_2(0 / 5 / 0)$$

$$\text{Schnittpunkt mit der } x_3\text{-Achse: } g_3: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot k + 25 = 0 \Rightarrow k = -\frac{25}{3} \Rightarrow S_3(0 / 0 / -\frac{25}{3})$$

7a)

$$\text{Umwandeln von E in Normalenform: } E: 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 5 \cdot (-s) + 4 \cdot (-2 - 4s) + 3 \cdot (4 + 7s) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow -1 = 0 \Rightarrow \text{die Ebene E und die Gerade g sind echt parallel}$$

7b)

$$5 \cdot (2 - 3s) + 4 \cdot (1 + 3s) + 3 \cdot 2s - 5 = 0$$

$$\Rightarrow s = -3$$

Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow S(11 / -8 / -6)$$

8.

$$-(3 + 2k) + 2 \cdot (-1 + k) + 2 \cdot (a + kb) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2a - 8 + 2kb = 0$$

$$\text{in der Ebene liegen hei\u00dft: } 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$2kb = 0 \Rightarrow b = 0, \text{ falls } k \neq 0$$

$$\Rightarrow b \text{ beliebig, falls } k = 0$$

9.1 Die Gerade g und die Ebene E haben einen gemeinsamen Punkt.

9.2

$$E: 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 9$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$

$$9.3 \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{R}$$