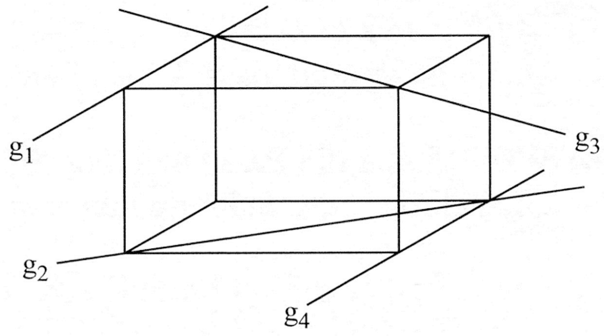
Lagebeziehung von Geraden

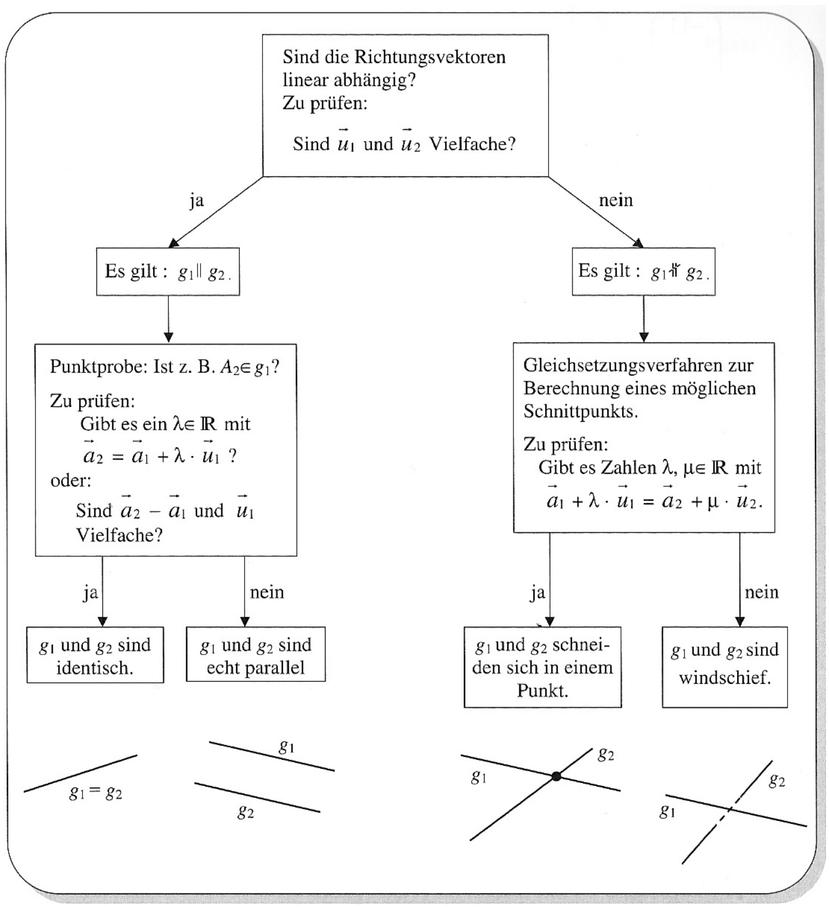


parallele Geraden: g_1 und g_4

sich schneidende Geraden: g_1 und g_3; g_2 und g_4

windschiefe Geraden: g_1 und g_2; g_2 und g_3; g_3 und g_4

Im folgenden Diagramm ist die Vorgehensweise zur Untersuchung der Lagebeziehung zwischen zwei Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + \lambda \cdot \vec{u}_1$ und $g_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + \lambda \cdot \vec{u}_2$ in einer Übersicht dargestellt.



Aufgaben:

1. Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{R}$ und der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$.

2. Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{R}$ und der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$.

3. Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{R}$ und der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$.

4. Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{R}$ und der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4{,}5 \\ -9 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$.

5. Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{R}$ und die Geradenschar

   $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

   Bestimmen Sie den Wert von a so, dass sich die Geraden g und h_a schneiden und geben Sie auch die Koordinaten des Schnittpunktes an.

Lösungen:

1.

Prüfen, ob die Richtungsvektoren linear unabhängig sind:

$$a\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{r}_g$ und $\vec{r}_h$ linear unabhängig $\Rightarrow$ g und h schneiden sich oder sind windschief

Gleichsetzen der Geradengleichungen g und h:

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

(I) $\Rightarrow k=\frac{3}{2}$ (II) $\Rightarrow t=-1$

k und t in (III): $\frac{3}{2}=4-(-1) \quad \Rightarrow \frac{3}{2}=5$

$\Rightarrow$ g und h sind windschief

2.

Richtungsvektoren von g und h sind linear abhängig, also sind g und h parallel oder identisch.

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\9\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\end{pmatrix} \quad \text{(III)}\Rightarrow 0=5 \quad \Rightarrow (3/2/0)\notin h$$

$\Rightarrow$ g und h sind echt parallel

3.

Prüfen, ob die Richtungsvektoren linear unabhängig sind:

$$a\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{r}_g$ und $\vec{r}_h$ linear unabhängig $\Rightarrow$ g und h schneiden sich oder sind windschief

Gleichsetzen der Geradengleichungen g und h:

$$\begin{pmatrix}-11\\9\\1\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\11\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$$

(I) $-11-4k=-4+3t$

(II) $9+3k=11+5t$

(III) $1-2k=4+t \quad \Rightarrow t=-3-2k$

$t=-3-2k$ in (II): $\Rightarrow k=-1 \quad t=-3+2=-1$

k und t in (I): $-11+4=-4-3 \quad \Rightarrow -7=-7$

$\Rightarrow$ g und h schneiden sich

$$\Rightarrow \vec{s}=\begin{pmatrix}-11\\9\\1\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\6\\3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow S(-7/6/3)$$

4.

Prüfen, ob die Richtungsvektoren linear unabhängig sind:

$$a\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\4{,}5\\-9\end{pmatrix} \quad \Rightarrow a=-1{,}5$$

$\Rightarrow \vec{r}_g$ und $\vec{r}_h$ linear abhängig $\Rightarrow$ g und h echt parallel oder identisch

Aufpunkt von g in h einsetzen:

$$\begin{pmatrix}3\\5{,}5\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-2\\14\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-6\\4{,}5\\-9\end{pmatrix}$$

(I) $3=13-6t \quad \Rightarrow t=\frac{5}{3}$

(II) $5{,}5=-2+4{,}5t \quad \Rightarrow t=\frac{5}{3}$

(III) $-1=14-9t \quad \Rightarrow t=\frac{5}{3}$

$\Rightarrow$ Aufpunkt von g liegt auf h $\Rightarrow$ g und h sind identisch

5.

Prüfen, ob die Richtungsvektoren linear unabhängig sind:

$$b \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{r}_g$ und $\vec{r}_{h_a}$ linear unabhängig für alle $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ g und h_a schneiden sich oder sind windschief

Gleichsetzen der Geradengleichungen g und h_a:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) $3 + 2k = at$

(II) $1 + k = 1 + 4t$

(III) $1 + k = 2 + t$

(II) $-$ (III): $\Rightarrow 0 = -1 + 3t \quad t = \frac{1}{3}$

$t = \frac{1}{3}$ in (III): $1 + k = 2 + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow k = \frac{4}{3}$

k und t in (I): $3 + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}a \quad \Rightarrow a = 17$

$\Rightarrow$ g und h_{17} schneiden sich

$$\Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow S\left(\frac{17}{3} / \frac{7}{3} / \frac{7}{3}\right)$$