Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

Definition:

Die Vektoren $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ heißen linear abhängig, wenn die Vektorgleichung $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ eine Lösung hat, bei der mindestens eine der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ verschieden von Null ist.
Besitzt diese Vektorgleichung nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, so heißen die Vektoren linear unabhängig.

Aufgaben:

1) Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

2) Bestimmen Sie den Wert von $t \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.

<u>Lösungen:</u>

1)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(I) \quad \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$
$(II) \quad \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0$
$(III) \quad \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$

$$\begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$(III) \Rightarrow 3\lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_3 = 0$
$(II) \Rightarrow -3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_2 = 0$
$(I) \Rightarrow \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow$ die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig

2)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(I) \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$
$(II) \quad \lambda_2 = 0$
$(III) \quad 2\lambda_1 + t\lambda_3 = 0$

$$\begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & t & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & t-2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig, wenn $t - 2 \neq 0$ gilt $\Rightarrow t \neq 2$