

Aufgaben zur linearen Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

1.0 Prüfen Sie, ob die drei Vektoren paarweise kollinear, komplanar oder keines von beiden sind.

$$1.1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad 1.2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 1.3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1.4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.0 Bestimmen Sie diejenigen reellen Zahlen für den Parameter a , für die der jeweils letzte Vektor eine Linearkombination der vorherigen Vektoren ist.

$$2.1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2.2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 2.3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ komplanar sind.

4.* Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ a+2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+3 \\ a+4 \\ a+5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a+6 \\ a+7 \\ a+8 \end{pmatrix}$ für alle Werte von $a \in \mathbb{R}$ komplanar sind.

5. Bestimmen Sie alle Werte von $t \in \mathbb{R}$, für die die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t \\ 4+t \end{pmatrix} \text{ linear abhängig bzw. unabhängig sind.}$$

6.0 Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind linear unabhängig.

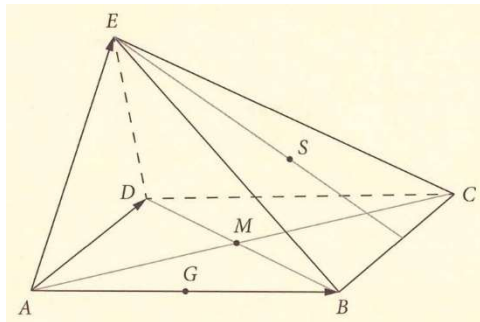
Untersuchen Sie \vec{u} und \vec{v} auf lineare Abhängigkeit.

6.1 $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$ $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$

6.2 $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$

7.0 Gegeben sind die linear unabhängigen Kantenvektoren

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ und $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ einer Pyramide ABCDE mit dem Parallelogramm ABCD als Grundfläche. S ist Schwerpunkt im Dreieck BCE. M ist die Mitte des Grundparallelogramms und G die Mitte der Strecke \overline{AB} .



7.1 Drücken Sie die Vektoren \overrightarrow{EG} und \overrightarrow{MS} möglichst einfach durch \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aus.

7.2 Untersuchen Sie, ob \overrightarrow{EG} und \overrightarrow{MS} linear unabhängig sind.

8. Gegeben ist die Basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ des \mathbb{R}^3 und der Vektor $\vec{a}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

aus \mathbb{R}^3 bezüglich der Basis B.

Berechnen Sie die Vektorkoordinaten von \vec{a}_B bezüglich der kanonischen

Basis des \mathbb{R}^3 .

9.0 Gegeben ist die Menge $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, wobei $k \in \mathbb{R}$, und der Vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

9.1 Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Menge B keine Basis des \mathbb{R}^3 ist.

9.2 Ermitteln Sie die Koordinaten von \vec{u} bezüglich B für $k = -1$.

10.0 Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ k \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -15 \\ -4 \end{pmatrix}$

mit $k \in \mathbb{R}$.

10.1 Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Menge $B = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \}$ keine Basis des \mathbb{R}^3 ist.

10.2 Ermitteln Sie die Koordinaten von \vec{b} bezüglich B für $k = -2$.

11.0 Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über Vektoren im \mathbb{R}^3 wahr und welche falsch sind und begründen Sie Ihre Antwort.

11.1 Jeder beliebige Vektor lässt sich als Linearkombination dreier linear unabhängiger Vektoren darstellen.

11.2 Wenn sich ein Vektor \vec{a} durch drei Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} darstellen lässt, dann sind \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} linear unabhängig und bilden eine Basis des \mathbb{R}^3 .

11.3 Nimmt man zu drei linear unabhängigen Vektoren einen vierten Vektor hinzu, so sind diese vier Vektoren linear abhängig.

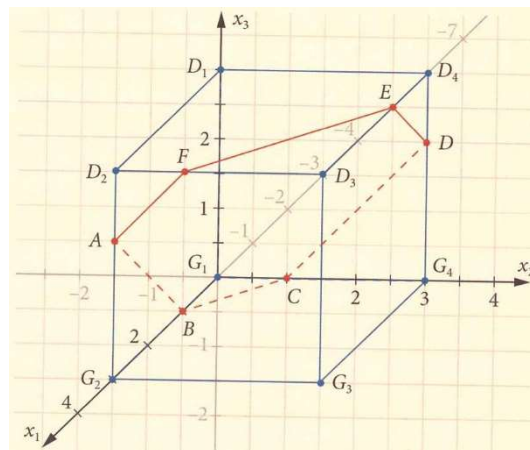
11.4 Bilden drei Vektoren eine geschlossene Vektorkette, so sind sie linear abhängig.

11.5 Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} seien linear unabhängig. Ist der Vektor \vec{c} zu \vec{a} und \vec{b} linear unabhängig, so sind auch alle drei Vektoren linear unabhängig.

11.6 Der Ansatz $k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} + m \cdot \vec{c} = \vec{0}$ hat immer mindestens eine Lösung.

11.7 Drei Vektoren, von denen einer der Nullvektor ist, sind immer linear abhängig.

12.0 In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Würfel W_1 der Kantenlänge 3 gegeben.



12.1 Die Punkte $D_1(0/0/3)$, $G_2(3/0/0)$ und $D_3(3/3/3)$ sind die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks.

Begründen Sie ausführlich, dass das Dreieck gleichschenkelig ist.

12.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

12.3 Die Pyramide $D_1D_2G_2D_3$ wird vom Würfel abgeschnitten.

Bestimmen Sie, wie viel Prozent des Würfelvolumens das Pyramidenvolumen einnimmt.

12.4 Die Punkte A, B, C, D, E und F teilen die Würfelseiten im Verhältnis 1 : 2.

Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C, D, E und F an.

12.5 Zeigen Sie: Die Vektoren \overline{AB} und \overline{DE} sind linear abhängig.

12.6 Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung:

$r \cdot \overline{BC} + s \cdot \overline{CD} + t \cdot \overline{DE} = \vec{0}$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

12.7 Die Punkte R, S, T, U, V und W bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks, deren Ecken auf den Würfelkanten liegen.

Es gilt: $R(1,5/0/0)$, $S(3/0/1,5)$ und $T(3/1,5/3)$.

Zeichnen Sie einen Würfel W_2 mit der Kantenlänge 3 im Schrägbild und ergänzen Sie die Punkte R, S und T. Zeichnen Sie auch die Punkte U, V und W ein und verbinden Sie die Punkte zu einem regelmäßigen Sechseck.

Geben Sie die Koordinaten der Punkte U, V und W an.

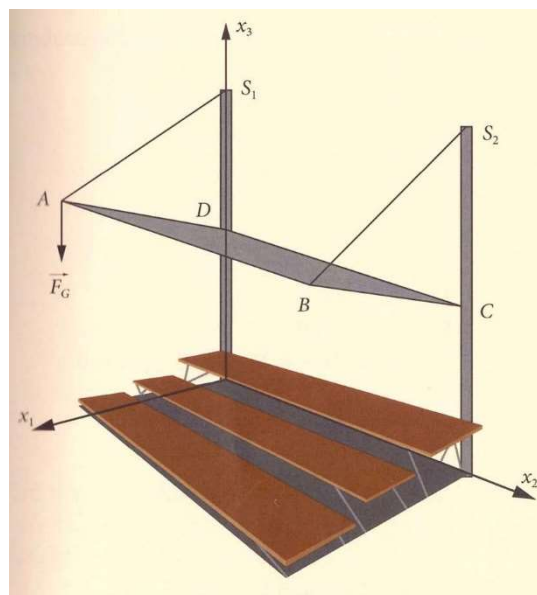
12.8 Berechnen Sie den Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks.

12.9 Die drei Vektoren $\overline{G_1D_3}$, $\overline{G_2D_4}$, $\overline{G_3D_1}$ in Richtung der Raumdiagonalen des

Würfels W_1 bilden die Basis eines Vektorraumes. Berechnen Sie die

Koordinaten der Vektoren \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} bezüglich dieser neuen Basis.

13.0 Für ein großes Sportevent möchte die berufliche Oberschule Regensburg eine Zuschauertribüne mieten. Die Abbildung zeigt modellhaft eine mietbare Zuschauertribüne, die auf einer horizontalen Fläche aufgebaut werden muss. Die Punkte $A(4/0/8)$, $B(4/10/8)$, C und $D(0/0/5)$ sind die Eckpunkte eines rechteckigen schrägen Daches, das die Zuschauer vor Sonne und Regen schützen soll. Das Dach ist mit zwei Seilen an zwei 10 m hohen Masten befestigt, die auf der horizontalen Fläche senkrecht stehen. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m.



13.1 Ermitteln Sie die Koordinaten des Eckpunktes C .

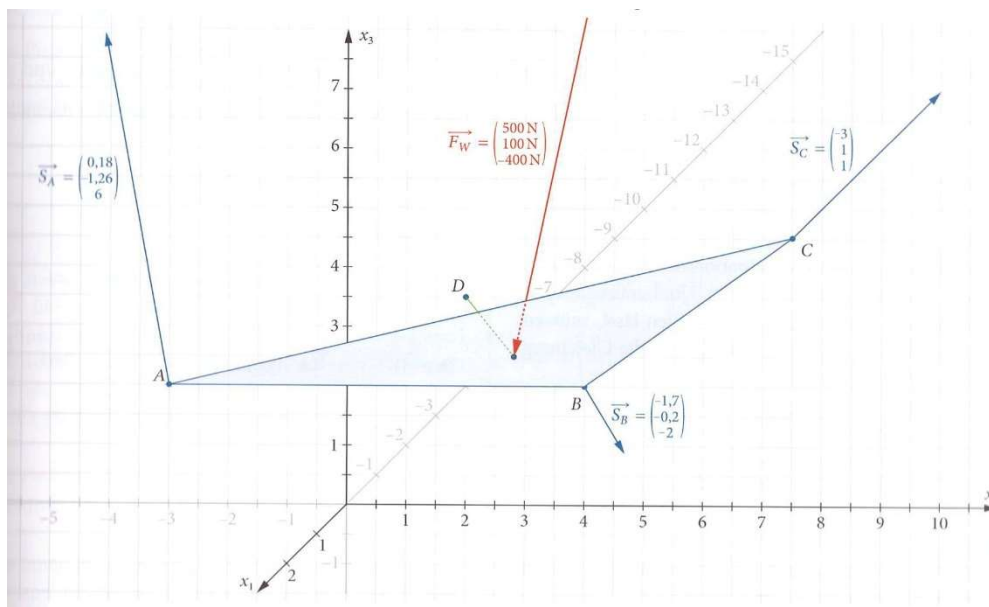
13.2 Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Daches.

13.3 Im Diagonalschnittpunkt M des Rechtecks $ABCD$ soll ein Strahler angebracht werden. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes M .

13.4 Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 .

13.5 Im Punkt A wirkt eine Gewichtskraft \vec{F}_G mit $|\vec{F}_G| = 10000 \text{ N}$ senkrecht zur horizontalen Fläche. Diese Kraft kann in eine Komponente \vec{F}_S des Zugseiles und in eine Komponente, die in Richtung des Punktes D wirkt, zerlegt werden. Ermitteln Sie den Betrag der Kräfte $|\vec{F}_S|$ und $|\vec{F}_D|$.

14.0 Auf der Terrasse von Familie Huber ist ein großes dreieckiges Sonnensegel gespannt. Die Punkte A(2/-2/3), B(0/4/2) und C(1/8/5) bilden die Ecken des Dreiecks. Da das Sonnensegel oft starkem Wind ausgesetzt ist, macht Herr Huber sich Sorgen, ob die Konstruktion hält.



14.1 Ein Windstoß mit der Kraft $\vec{F}_W = \begin{pmatrix} 500 \text{ N} \\ 100 \text{ N} \\ -400 \text{ N} \end{pmatrix}$ zerzt im Schwerpunkt des

Sonnensegels an den Befestigungsseilen. Die Kraft kann in eine Komponente \vec{F}_A , die in Richtung des Befestigungsseiles im Punkt A wirkt, in eine Komponente \vec{F}_B , die in Richtung des Befestigungsseiles im Punkt B wirkt und in eine Komponente \vec{F}_C , die in Richtung des Befestigungsseiles im Punkt C wirkt, zerlegt werden.

Ermitteln Sie den Betrag der Kräfte $|\vec{F}_A|$, $|\vec{F}_B|$ und $|\vec{F}_C|$.

14.2 Im Schwerpunkt S des Sonnensegels soll eine zusätzliche Aufhängung für ein Abspannseil zu einem Baum angebracht werden.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks und die Länge des Stahlseiles, wenn das Seil im Punkt $D(0/2/3,5)$ befestigt werden soll.

Lösungen

1.1

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 \\ 4 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & -8 & -6 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 26 & | & 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Vektoren linear unabhängig, nicht paarweise kollinear und nicht komplanar.

1.2

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & | & 0 \\ 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ -1 & 1 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 8 & 8 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Vektoren sind komplanar.

1.3

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 & | & 0 \\ 1 & 3 & 14 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 & | & 0 \\ 0 & -9 & -36 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Vektoren sind komplanar.

1.4

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Vektoren sind komplanar.

2.1

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \lambda = 2 \\ \text{(II)} 0 = a \\ \text{(III)} 0 = 0 \end{array}$$

⇒ $a = 0$

2.2

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 2a \\ \text{(II)} \quad \lambda_1 + a\lambda_2 = 2 \\ \text{(III)} \quad a\lambda_1 - \lambda_2 = -1 \end{array}$$

$$\text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 = 2a - \lambda_2$$

$$\text{(II)} \Rightarrow 2a - \lambda_2 + a\lambda_2 = 2 \Rightarrow (a-1)\lambda_2 = 2 - 2a$$

$$\text{(III)} \Rightarrow 2a^2 - a\lambda_2 - \lambda_2 = -1 \Rightarrow (-a-1)\lambda_2 = -1 - 2a^2$$

\Rightarrow es gibt kein a ;

2.3

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{(I)} \quad 0 = a \\ \text{(II)} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \text{(III)} \quad a\lambda_2 = 1 \end{array}$$

\Rightarrow es gibt kein a ;

3.

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 & | & 0 \\ 3 & 6 & 12 & | & 0 \\ -9 & 12 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 & | & 0 \\ 0 & 27 & 27 & | & 0 \\ 0 & 99 & 153 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 & | & 0 \\ 0 & 27 & 27 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1458 & | & 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Das LGS besitzt eine eindeutige Lösung ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$)

\Rightarrow Vektoren sind linear unabhängig und damit nicht komplanar.

4.

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} a & a+3 & a+6 & | & 0 \\ a+1 & a+4 & a+7 & | & 0 \\ a+2 & a+5 & a+8 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{a \neq 0} \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} a & a+3 & a+6 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 0 & -6 & -12 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} a & a+3 & a+6 & | & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Das LGS besitzt für alle $a \in \mathbb{R}$ unendlich viele Lösungen

\Rightarrow Vektoren sind linear abhängig und damit komplanar.

5.

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 4 & -4 & 1+t & | & 0 \\ -1 & 1 & 4+t & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -16 & 3+3t & | & 0 \\ 0 & 4 & 12+3t & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -16 & 3+3t & | & 0 \\ 0 & 0 & -204-60t & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$-204 - 60t = 0 \Rightarrow t = -3, 4$$

$t = -3, 4$: Vektoren sind linear abhängig

$t \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 4\}$: Vektoren sind linear unabhängig

6.1

$$\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 (\vec{a} - \vec{b}) + \lambda_2 (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a} + (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{b} = \vec{0}$$

$$\text{(I)} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_1$$

$$\text{(II)} \quad \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow \vec{u}$ und \vec{v} sind linear unabhängig

6.2

$$\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) + \lambda_2 (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{0}$$

$$\left(\frac{1}{2} \lambda_1 - \lambda_2 \right) \vec{a} + \left(\frac{1}{2} \lambda_1 + \lambda_2 \right) \vec{b} = \vec{0}$$

$$\text{(I)} \quad \frac{1}{2} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2} \lambda_1$$

$$\text{(II)} \quad \frac{1}{2} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow \vec{u}$ und \vec{v} sind linear unabhängig

7.1

$$\overline{EG} = \overline{EA} + \overline{AG} = -\vec{c} + \frac{1}{2} \vec{a}$$

$$\overline{MS} = \overline{MC} + \overline{CS} = \frac{1}{2} \overline{AC} + \frac{2}{3} \overline{CM_2} \quad (M_2 \text{ Mittelpunkt von } [EB])$$

$$\overline{MS} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) + \frac{2}{3} \left[-\vec{b} + \frac{1}{2} (-\vec{a} + \vec{c}) \right] = \frac{1}{6} \vec{a} - \frac{1}{6} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c}$$

7.2

$$\lambda_1 \overrightarrow{EG} + \lambda_2 \overrightarrow{MS} = \vec{0}$$

$$\left(\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{6}\lambda_2\right)\vec{a} + \left(-\frac{1}{6}\lambda_2\right)\vec{b} + \left(-\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2\right)\vec{c} = \vec{0}$$

$$(I) \quad \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{6}\lambda_2 = 0$$

$$(II) \quad -\frac{1}{6}\lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_2 = 0$$

$$(III) \quad -\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2$$

$\Rightarrow \overrightarrow{EG}$ und \overrightarrow{MS} sind linear unabhängig

$$8. \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

9.1

$$\begin{array}{l} (I) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & k & | & 0 \\ 2 & -2k & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad (I) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & k & | & 0 \\ 0 & -4k-2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad (I) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & k & | & 0 \\ 0 & 4k^2+2k & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$4k^2 + 2k = 0 \quad \Rightarrow k(4k + 2) = 0 \quad \Rightarrow k_1 = 0 \quad k_2 = -0,5$$

\Rightarrow Das LGS besitzt für $k = 0$ und $k = -0,5$ unendliche viele Lösungen

\Rightarrow Vektoren sind linear abhängig und bilden damit keine Basis des \mathbb{R}^3 .

9.2

$$\begin{array}{l} (I) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 \\ 2 & 2 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \quad (I) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(III) \Rightarrow \lambda_2 = -3 \quad (II) \Rightarrow \lambda_3 = -6 \quad (I) \Rightarrow \lambda_1 = 4,5$$

$$\Rightarrow \vec{u}_B = \begin{pmatrix} 4,5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

10.1

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 9 & 0 \\ k+1 & k & 4 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-2k & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k-3 & 0 \end{array} \right)$$

$$2k-3=0 \Rightarrow k=1,5$$

\Rightarrow Das LGS besitzt für $k=1,5$ unendliche viele Lösungen

\Rightarrow Vektoren sind linear abhängig und bilden damit keine Basis des \mathbb{R}^3 .

10.2

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 9 & -15 \\ -1 & -2 & 4 & -4 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 6 & -6 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{(III)} \Rightarrow \lambda_3 = -\frac{1}{7} \quad \text{(II)} \Rightarrow \lambda_2 = 5\frac{1}{7} \quad \text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{52}{7}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_B = \begin{pmatrix} \frac{52}{7} \\ \frac{36}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

11.1 Richtig.

11.2 Falsch. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ müssen dazu nicht unbedingt linear unabhängig sein

11.3 Richtig.

11.4 Richtig.

11.5 Falsch. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ können trotzdem in einer Ebene liegen

11.6 Richtig.

11.7 Richtig.

12.1

$\overline{D_1D_3} = \overline{G_2D_3}$, weil beide Strecken eine Diagonale einer Würfel­fläche sind und damit muss das Dreieck $D_1G_2D_3$ gleichschenkelig sein.

12.2

$$\text{Mittelpunkt von } [D_1G_2]: \vec{m} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{D_1G_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{D_1G_2}| = \sqrt{18}$$

$$\overrightarrow{MD_3} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{MD_3}| = \sqrt{13,5}$$

$$\Rightarrow A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{13,5} = 4,5\sqrt{3} \approx 7,79$$

12.3

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} G \cdot h$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{D_1D_2} \cdot \overrightarrow{D_2G_2} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5 \quad h = \overrightarrow{D_2D_3} = 3$$

$$\Rightarrow V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot 4,5 \cdot 3 = 4,5$$

$$V_{\text{Würfel}} = 27$$

\Rightarrow Pyramidenvolumen nimmt etwa 16,7% ein.

12.4 A(3/0/2), B(1/0/0), C(0/1/0), D(0/3/2), E(1/3/3), F(3/1/3)

12.5

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -2 \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ und \overrightarrow{DE} sind linear abhängig.

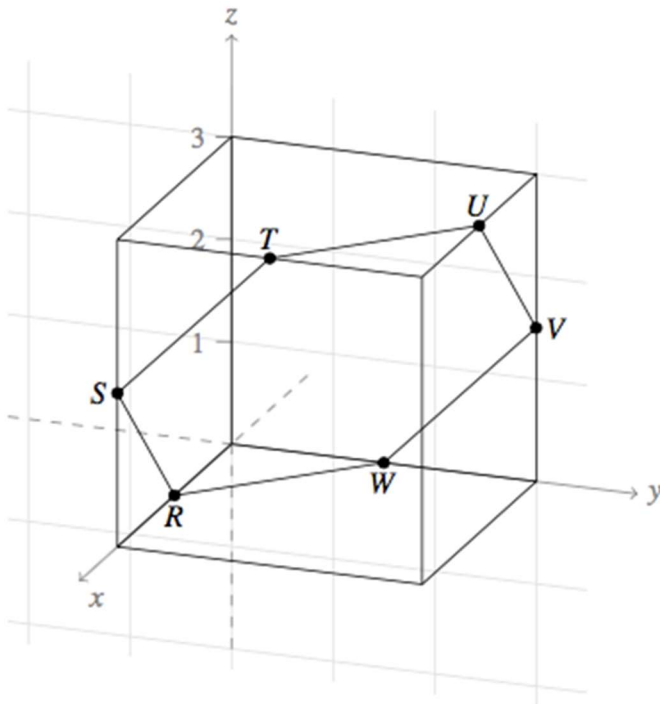
12.6

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 | 0 \\ \text{(II)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 | 0 \\ \text{(III)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 | 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 | 0 \\ \text{(II)} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 | 0 \\ \text{(III)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 | 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 | 0 \\ \text{(II)} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 | 0 \\ \text{(III)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 | 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

Die Vektoren \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} und \overrightarrow{DE} liegen in einer Ebene, sind also komplanar.

12.7

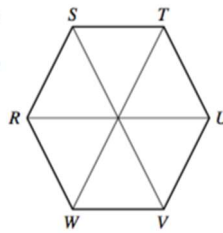


$$U(1,5|3|3), V(0|3|1,5), W(0|1,5|0)$$

12.8

$$\overline{RS} = \sqrt{1,5^2 + 1,5^2} = \sqrt{4,5}$$

$$A = 6 \cdot \frac{\overline{RS}^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{27}{4} \sqrt{3}$$



12.9

$$\overline{G_1D_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overline{G_2D_4} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overline{G_3D_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overline{BC}: \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 18 & 0 & 6 \\ 0 & 18 & 18 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{(II)} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{3} \quad \text{(III)} \Rightarrow \lambda_3 = -\frac{1}{6} \quad \text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{6}$$

$$\overline{CD}: \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 6 \\ 0 & 18 & 18 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{(II)} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{3} \quad \text{(III)} \Rightarrow \lambda_3 = 0 \quad \text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3}$$

$$\overline{DE}: \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 18 & 0 & -3 \\ 0 & 18 & 18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(II)} \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{6} \quad \text{(III)} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{6} \quad \text{(I)} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3}$$

13.1 C(0/10/5)

13.2

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{\text{Dach}} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| = 5 \cdot 10 = 50 \text{ m}^2$$

$$13.3 \quad \vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6,5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow M(2/5/6,5)$$

13.4

$$S_1(0/0/x_3) \quad S_2(0/10/x_3)$$

$$\overrightarrow{AS_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ x_3 - 8 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{AS_1}| = \sqrt{16 + x_3^2 - 16x_3 + 64} = \sqrt{x_3^2 - 16x_3 + 82}$$

$$|\overrightarrow{AS_1}| = 10 \Rightarrow x_3^2 - 16x_3 + 82 = 100$$

$$\Rightarrow x_3^2 - 16x_3 - 18 = 0 \quad \Rightarrow x_{3_1} \approx 17,06 \quad (x_{3_2} \approx -1,06)$$

$$\Rightarrow S_1(0/0/17,06) \quad S_2(0/10/17,06)$$

13.5

$$|\overrightarrow{AD}| = 5 \quad |\overrightarrow{AS_1}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 9,06 \end{pmatrix} \right| = 9,9$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_S| \approx 6667 \text{ N} \quad |\vec{F}_D| \approx 3333 \text{ N}$$

14.1

Die Summe aller Kräfte ist null: $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_W = \vec{0}$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 0,18 \\ -1,266 \\ 6 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1,7 \\ -0,2 \\ -2 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -500 \\ -100 \\ 400 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,18 & -1,7 & -3 & -500 \\ -1,26 & -0,2 & 1 & -100 \\ 6 & -2 & 1 & 400 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0,18 & -1,7 & -3 & -500 \\ 0 & -2,178 & -3,6 & -648 \\ 0 & 9,84 & 18,18 & 3072 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0,18 & -1,7 & -3 & -500 \\ 0 & -2,178 & -3,6 & -648 \\ 0 & 0 & -4,17204 & -314,496 \end{array} \right)$$

$$(III) \Rightarrow c \approx 75,38 \quad (II) \Rightarrow b \approx 172,92 \quad (I) \Rightarrow 111,74$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_A| = \left| 111,74 \cdot \begin{pmatrix} 0,18 \\ -1,26 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 685,65$$

$$|\vec{F}_B| = \left| 172,92 \cdot \begin{pmatrix} -1,7 \\ -0,2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 455,22$$

$$|\vec{F}_C| = \left| 75,38 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 250,01$$

14.2

$$\vec{s} = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S \left(1 / \frac{10}{3} / \frac{10}{3} \right)$$

$$|\vec{SD}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \right| = \frac{\sqrt{101}}{6} \approx 1,67 \text{ m}$$