Lineare Gleichungssysteme

Beispiel:

$$\begin{aligned}
(I)\quad & 6x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 22 \\
(II)\quad & 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 33 \\
(III)\quad & 0x_1 + x_2 + 4x_3 = 22
\end{aligned}$$

Lösung dieses linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus:

Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 4 & 3 & 3 & 33 \\ 0 & 1 & 4 & 22 \end{array}\right)$$

Ziel: Dreiecksform der Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

* sind reelle Zahlen

1. Schritt: In der ersten Spalte muss statt 4 eine Null stehen

$$4 \cdot (I) - 6 \cdot (II):\ 0 \quad -10 \quad -18 \,|\, -110$$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & -10 & -18 & -110 \\ 0 & 1 & 4 & 22 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 5 & 9 & 55 \\ 0 & 1 & 4 & 22 \end{array}\right)$$

2. Schritt: In der zweiten Spalte muss statt 1 eine Null stehen

$$5 \cdot (III) - (II):\ 0 \quad 0 \quad 11 \,|\, 55$$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 5 & 9 & 55 \\ 0 & 0 & 11 & 55 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 5 & 9 & 55 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

3. Schritt: Berechnen der Lösung des linearen Gleichungssystems

$(III) \Rightarrow x_3 = 5$
$(II) \Rightarrow 5x_2 + 9x_3 = 55 \quad \Rightarrow x_2 = 2$
$(I) \Rightarrow 6x_1 + 2x_2 = 22 \quad \Rightarrow x_1 = 3$
$\Rightarrow$ (3 / 2 / 5) ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

Allgemeines lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{ll}
(I) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
(II) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
(III) & \\
(IV) & \\
\vdots & \\
\vdots & \\
(m) & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

m Gleichungen für n Unbekannte (m – n – System)

Es gilt:

(1) Ist $(b_1, b_2, ..., b_m) = (0, 0, ..., 0)$, so heißt das lineare Gleichungssystem homogen, sonst inhomogen.

(2) Ist m > n (m < n), so heißt das lineare Gleichungssystem überbestimmt (unterbestimmt).

Aufgaben:

1)

$$(I)\quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$
$$(II)\quad x_1 + x_2 + x_3 = -1$$
$$(III)\quad 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

2)

$$(I)\quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$
$$(II)\quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3$$
$$(III)\quad 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$$

3)

$$(I)\quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$
$$(II)\quad -x_1 - 5x_2 - 5x_3 = 0$$

4)

$$(I)\quad x_1 - 7x_2 = 22$$
$$(II)\quad 3x_1 + 5x_2 = -12$$
$$(III)\quad 3x_1 + 6x_2 = 8$$

Lösungen:

1)

$$\begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[5\cdot(I)-2\cdot(III)]{2\cdot(II)-(I)} \begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 17 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{17\cdot(III)+(II)} \begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 18 & -36 \end{array}\right)$$

$(III) \Rightarrow 18x_3 = -36 \quad \Rightarrow x_3 = -2$

$(II) \Rightarrow -x_2 + x_3 = -2 \quad \Rightarrow x_2 = 0$

$(I) \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 1$

$\Rightarrow (1/0/-2)$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

2)

$$\begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[4\cdot(I)-(III)]{2\cdot(I)-(II)} \begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II)+(III)} \begin{array}{r} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(III) \Rightarrow 0x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_3$ beliebig z.B. $x_3 = z$

$(II) \Rightarrow -5x_2 + 5x_3 = -1 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{1}{5} + z$

$(I) \Rightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{6}{5} - z$

$\Rightarrow (\frac{6}{5} - z / \frac{1}{5} + z / z)$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

$$\Rightarrow IL = \left\{ \vec{x} / \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3)

$$\begin{matrix}(I)\\(II)\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 1\\ -1 & -5 & -5 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{(I)+(II)} \begin{matrix}(I)\\(II)\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -7 & -4 & 1\end{array}\right)$$

$(II) \Rightarrow -7x_2 - 4x_3 = 1 \quad \Rightarrow x_3$ beliebig z.B. $\mathrm{x}_3 = z \quad \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{7} - \frac{4}{7}z$

$(I) \Rightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{5}{7} - \frac{15}{7}z$

$\Rightarrow \left(-\frac{1}{7} - \frac{4}{7}z \,/\, \frac{5}{7} - \frac{15}{7}z \,/\, z\right)$ ist Lösung des LGS

4)

$$\begin{matrix}(I)\\(II)\\(III)\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -7 & 22\\ 3 & 5 & -12\\ 3 & 6 & 8\end{array}\right) \xrightarrow{3\cdot(I)-(III)} \begin{matrix}(I)\\(II)\\(III)\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -7 & 22\\ 3 & 5 & -12\\ 0 & -27 & 58\end{array}\right)$$

$(III) \Rightarrow -27x_2 = 58 \quad \Rightarrow x_2 = -\frac{58}{27}$

$(II) \Rightarrow 3x_1 + 5x_2 = -12 \quad \Rightarrow x_1 = -\frac{34}{81}$

Überprüfen mit (I): $x_1 - 7x_2 = 22 \quad \Rightarrow -\frac{34}{81} - 7\cdot(-\frac{58}{27}) = 22 \;\Rightarrow \frac{1181}{81} = 22 \;(f)$

$\Rightarrow IL = \varnothing$