

# Lineare Gleichungssysteme

Beispiel:

$$(I) \quad 6x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 22$$

$$(II) \quad 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 33$$

$$(III) \quad 0x_1 + x_2 + 4x_3 = 22$$

Lösung dieses linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus:

Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A/b) = \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 4 & 3 & 3 & 33 \\ 0 & 1 & 4 & 22 \end{array} \right)$$

Ziel: Dreiecksform der Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right) \quad * \text{ sind reelle Zahlen}$$

1. Schritt: In der ersten Spalte muss statt 4 eine Null stehen

$$4 \cdot (I) - 6 \cdot (II): \quad 0 \quad -10 \quad -18 \quad | \quad -110$$

$$\begin{array}{l} (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \end{array} \right) \\ (II) \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -10 & -18 & -110 \end{array} \right) \\ (III) \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 22 \end{array} \right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \end{array} \right) \\ (II) \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 9 & 55 \end{array} \right) \\ (III) \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 22 \end{array} \right) \end{array}$$

2. Schritt: In der zweiten Spalte muss statt 1 eine Null stehen

$$5 \cdot (III) - (II): \quad 0 \quad 0 \quad 11 \quad | \quad 55$$

$$\begin{array}{l} (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \end{array} \right) \\ (II) \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 9 & 55 \end{array} \right) \\ (III) \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 11 & 55 \end{array} \right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \end{array} \right) \\ (II) \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 9 & 55 \end{array} \right) \\ (III) \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \end{array}$$

### 3. Schritt: Berechnen der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(III) \Rightarrow x_3 = 5$$

$$(II) \Rightarrow 5x_2 + 9x_3 = 55 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$(I) \Rightarrow 6x_1 + 2x_2 = 22 \Rightarrow x_1 = 3$$

$\Rightarrow (3 / 2 / 5)$  ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

### Allgemeines lineares Gleichungssystem:

$$(I) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$(II) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$(III)$$

$$(IV)$$

:

:

$$(m) \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

m Gleichungen für n Unbekannte (m – n – System)

### Es gilt:

(1) Ist  $(b_1, b_2, \dots, b_m) = (0, 0, \dots, 0)$ , so heißt das lineare Gleichungssystem homogen, sonst inhomogen.

(2) Ist  $m > n$  ( $m < n$ ), so heißt das lineare Gleichungssystem überbestimmt (unterbestimmt).

Aufgaben:

1)

(I)  $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$

(II)  $x_1 + x_2 + x_3 = -1$

(III)  $5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$

2)

(I)  $x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$

(II)  $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3$

(III)  $4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$

3)

(I)  $x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$

(II)  $-2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2$

(III)  $3x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -3$

4)

(I)  $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$

(II)  $-x_1 + 4x_2 - x_3 = -6$

(III)  $x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 1$

5)

(I)  $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$

(II)  $-x_1 - 5x_2 - 5x_3 = 0$

6)

(I)  $x_1 - 7x_2 = 22$

(II)  $3x_1 + 5x_2 = -12$

(III)  $3x_1 + 6x_2 = 8$

### Lösungen:

1)

$$\begin{array}{l} (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ (II) & 1 & 1 & -1 \\ (III) & 5 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2 \cdot (II) - (I) \\ \underline{5 \cdot (I) - 2 \cdot (III)} \end{array} \quad (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ (II) & 0 & -1 & -2 \\ (III) & 0 & 17 & -2 \end{array} \right) \\ \underline{17 \cdot (III) + (II)} \quad (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ (II) & 0 & -1 & -2 \\ (III) & 0 & 0 & -36 \end{array} \right) \end{array}$$

$$(III) \Rightarrow 18x_3 = -36 \Rightarrow x_3 = -2$$

$$(II) \Rightarrow -x_2 + x_3 = -2 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$(I) \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$\Rightarrow (1/0/-2)$  ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

2)

$$\begin{array}{l} (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ (II) & 2 & 3 & -1 \\ (III) & 4 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2 \cdot (I) - (II) \\ \underline{4 \cdot (I) - (III)} \end{array} \quad (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ (II) & 0 & -5 & 5 \\ (III) & 0 & -5 & -1 \end{array} \right) \\ \underline{(II) + (III)} \quad (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ (II) & 0 & -5 & -1 \\ (III) & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (\text{einfach unterbestimmtes Gleichungssystem}) \end{array}$$

$$(III) \Rightarrow 0x_3 = 0 \Rightarrow x_3 \text{ beliebig z.B. } x_3 = t$$

$$(II) \Rightarrow -5x_2 + 5x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{5} + t$$

$$(I) \Rightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{6}{5} - t$$

$\Rightarrow (\frac{6}{5} - t / \frac{1}{5} + t / t)$  ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

$$\Rightarrow IL = \left\{ \vec{x} / \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3)

$$\begin{array}{l} (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ (II) & -2 & -2 & 4 & 2 \\ (III) & 3 & 3 & -6 & -3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} (II)+2 \cdot (I) \\ \underline{(III)-3 \cdot (I)} \end{array} \quad (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ (II) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (III) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

(zweifach unterbestimmtes Gleichungssystem)

$\Rightarrow x_3$  beliebig z.B.  $x_3 = t$  und  $x_2$  beliebig z.B.  $x_2 = s$

$$(I) \Rightarrow x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \Rightarrow x_1 = -1 - s + 2t$$

$\Rightarrow (-1 - s + 2t / s / t)$  ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

$$\Rightarrow IL = \left\{ \vec{x} / \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

4)

$$\begin{array}{l} (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 6 \\ (II) & -1 & 4 & -1 & -6 \\ (III) & 1 & 10 & 3 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 2 \cdot (II) + (I) \\ \underline{(III) + (II)} \end{array} \quad (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 6 \\ (II) & 0 & 7 & 1 & -6 \\ (III) & 0 & 14 & 2 & -5 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 6 \\ (II) & 0 & 7 & 1 & -6 \\ \underline{(III) - 2 \cdot (II)} & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right) \end{array}$$

$$(III) \Rightarrow 0x_3 = 7 \Rightarrow L = \emptyset$$

5)

$$\begin{array}{l} (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(I)+(II)} (I) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & 1 \end{array} \right) \\ (II) \end{array}$$

$$(II) \Rightarrow -7x_2 - 4x_3 = 1 \Rightarrow x_3 \text{ beliebig z.B. } x_3 = t \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{7} - \frac{4}{7}t$$

$$(I) \Rightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{7} - \frac{15}{7}t$$

$$\Rightarrow \left( \frac{5}{7} - \frac{15}{7}t / -\frac{1}{7} - \frac{4}{7}t / t \right) \text{ ist Lösung des LGS}$$

6)

$$\begin{array}{l} (I) \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -7 & 22 \\ 3 & 5 & -12 \\ 3 & 6 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{3 \cdot (I) - (III)} (I) \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -7 & 22 \\ 3 & 5 & -12 \\ 0 & -27 & 58 \end{array} \right) \\ (II) \\ (III) \end{array}$$

$$(III) \Rightarrow -27x_2 = 58 \Rightarrow x_2 = -\frac{58}{27}$$

$$(II) \Rightarrow 3x_1 + 5x_2 = -12 \Rightarrow x_1 = -\frac{34}{81}$$

$$\text{Überprüfen mit (I): } x_1 - 7x_2 = 22 \Rightarrow -\frac{34}{81} - 7 \cdot \left(-\frac{58}{27}\right) = 22 \Rightarrow \frac{1181}{81} = 22 \text{ (f)}$$

$$\Rightarrow IL = \emptyset$$