Lineare Gleichungssysteme mit Formvariablen

Beispiele:

1 Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von $m \in \mathbb{R}$.

(I) $2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 8$
(II) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$
(III) $3x_1 + 2x_2 + mx_3 = 8$

2 Bestimmen Sie den Wert von $a \in \mathbb{R}$ so, dass das System eine eindeutige Lösung hat.

(I) $-ax_1 + (a-2)x_2 = a$
(II) $-x_2 + x_3 = 1$
(III) $2x_1 - x_2 + 3x_3 = a+2$

3 Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus den Wert für a, für den das folgende lineare Gleichungssystem keine Lösung hat. (Abitur 2002 BI)

(I) $x_1 - x_2 - x_3 = -4$
(II) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
(III) $x_1 + 5x_2 + ax_3 = 0$

Lösungen:

1

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & m & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 4 & -4 \\ 0 & 16 & 2m-6 & -8 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 16m-112 & 0 \end{array}\right)$$

$m=7$: das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen

$m\neq 7$: das lineare Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung

2

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -a & a-2 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & a+2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Zeile (I) und (III) tauschen}} \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a+2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -a & a-2 & 0 & a \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a+2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & a-4 & 3a & a^2+4a \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a+2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4a+4 & -a^2-5a+4 \end{array}\right)$$

Für eine eindeutige Lösung muss gelten: $-4a+4\neq 0 \quad \Rightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

3

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & a & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & a+1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2a-10 & -34 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung für, wenn $2a-10=0 \;\Rightarrow a=5$