Lineare Gleichungssysteme mit Formvariablen

Beispiele:

1) Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von $m \in \mathbb{R}$.

$$(I)\quad 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 8$$
$$(II)\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$
$$(III)\quad 3x_1 + 2x_2 + mx_3 = 8$$

2) Bestimmen Sie den Wert von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0;4\}$ so, dass das System eine eindeutige Lösung hat.

$$(I)\quad -ax_1 + (a-2)x_2 = a$$
$$(II)\quad -x_2 + x_3 = 1$$
$$(III)\quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = a + 2$$

3) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus den Wert für a, für den das folgende lineare Gleichungssystem keine Lösung hat. (Abitur 2002 BI)

$$(I)\quad x_1 - x_2 - x_3 = -4$$
$$(II)\quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$(III)\quad x_1 + 5x_2 + ax_3 = 0$$

Lösungen:

1)

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & m & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 4 & -4 \\ 0 & 16 & 2m-6 & -8 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & 8 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 16m-112 & 0 \end{array}\right)$$

$m = 7$: das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen

$m \neq 7$: das lineare Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung

2)

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -a & a-2 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & a+2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Zeile (I) und (III) tauschen}} \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a+2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -a & a-2 & 0 & a \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a+2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & a-4 & 3a & a^2+4a \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & a+2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4a+4 & -a^2-5a+4 \end{array}\right)$$

Für eine eindeutige Lösung muss gelten: $-4a+4 \neq 0 \quad \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0;1;4\}$

3)

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & a & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & a+1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2a-10 & -34 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung für, wenn $2a-10=0 \quad \Rightarrow a = 5$