Lineare Gleichungssysteme mit vier Unbekannten

<u>Beispiele:</u>

1) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems.

$(I)\quad x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 11$

$(II)\quad 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7$

$(III)\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -5$

$(IV)\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -6$

2) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems.

$(I)\quad x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -9$

$(II)\ 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 3$

$(III)3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -9$

$(IV)4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 9$

<u>Lösungen:</u>

1)

$$\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\\(IV)\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&3&-2&11\\3&-2&1&0&7\\-1&4&2&2&-5\\3&-3&-5&1&-6\end{array}\right)\quad\rightarrow\quad\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\\(IV)\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&3&-2&11\\0&-2&-8&6&-26\\0&4&5&0&6\\0&-3&-14&7&-39\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\quad\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\\(IV)\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&3&-2&11\\0&-2&-8&6&-26\\0&0&22&-24&92\\0&0&4&4&0\end{array}\right)\quad\rightarrow\quad\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\\(IV)\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&3&-2&11\\0&-2&-8&6&-26\\0&0&22&-24&92\\0&0&0&184&-368\end{array}\right)$$

$(IV)\Rightarrow 184x_4=-368\ \Rightarrow x_4=-2$

$(III)\Rightarrow 22x_3-24x_4=92\ \Rightarrow x_3=2$

$(II)\Rightarrow -2x_2-8x_3+6x_4=-26\ \Rightarrow x_2=-1$

$(I)\Rightarrow x_1+3x_3-2x_4=11\ \Rightarrow x_1=1$

$\Rightarrow (1\,/-1\,/\,2\,/-2)$ ist Lösung des LGS

2)

$$\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\\(IV)\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-2&-9\\0&3&4&-1&3\\3&-2&3&0&-9\\4&2&-1&1&9\end{array}\right)\quad\rightarrow\quad\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\\(IV)\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-2&-9\\0&3&4&-1&3\\0&1&-3&6&18\\0&6&-9&9&45\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\quad\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\\(IV)\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-2&-9\\0&3&4&-1&3\\0&0&-13&19&51\\0&0&-51&33&117\end{array}\right)\quad\rightarrow\quad\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\\(IV)\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-2&-9\\0&3&4&-1&3\\0&0&-13&19&51\\0&0&0&540&1080\end{array}\right)$$

$(IV)\Rightarrow 540x_4=1080\ \Rightarrow x_4=2$

$(III)\Rightarrow -13x_3+19x_4=51\ \Rightarrow x_3=-1$

$(II)\Rightarrow 3x_2+4x_3-x_4=3\ \Rightarrow x_2=3$

$(I)\Rightarrow x_1-x_2+2x_3-2x_4=-9\ \Rightarrow x_1=0$

$\Rightarrow (0\,/\,3\,/-1\,/\,2)$ ist Lösung des LGS