Linearkombinationen von Vektoren

Ansatz: $\vec{x} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n}$

Beispiele:

1) Ermitteln Sie, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden kann.

2) Ermitteln Sie, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden kann.

3) Prüfen Sie, ob es $t \in \mathbb{R}$ gibt, dass der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination der

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

Lösungen:

1)

$$\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}=\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&(I)\quad \lambda_1+\lambda_3=0\\&(II)\quad \lambda_2+\lambda_3=1\\&(III)\quad \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=4\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&1\\1&1&-1&4\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&1&-2&4\end{array}\right)\xrightarrow{(II)-(III)}\begin{array}{c}(I)\\(II)\\(III)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&3&-3\end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}&(III)\Rightarrow\lambda_3=-1\\&(II)\Rightarrow\lambda_2+\lambda_3=1\ \Rightarrow\lambda_2=2\\&(I)\Rightarrow\lambda_1+\lambda_3=0\ \Rightarrow\lambda_1=1\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar, d.h. der Vektor $\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ kann als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dargestellt werden

$$\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$(I)\quad -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0$

$(II)\ \ \lambda_1 + \lambda_3 = -1$

$(III)\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 2$

$$\begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ das LGS ist unlösbar, d.h. der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kann nicht als

Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dargestellt werden

3)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(I)\quad \lambda_1 + (t-1)\lambda_2 + t\lambda_3 = 1$

$(II)\ \ \lambda_2 + t\lambda_3 = 1$

$(III)\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$$\begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ für $t \neq 1$ lässt sich der Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination

der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen