Linearkombinationen von Vektoren

Ansatz: $\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a_n}$

Beispiele:

1 Ermitteln Sie, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden kann.

2 Ermitteln Sie, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden kann.

3 Prüfen Sie, ob es $t \in \mathbb{R}$ gibt, dass der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination der

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

Lösungen:

1

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(I) $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$

(II) $\lambda_2 + \lambda_3 = 1$

(III) $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 4$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(II)-(III)} \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$(III) \Rightarrow \lambda_3 = -1$

$(II) \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \;\Rightarrow \lambda_2 = 2$

$(I) \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \;\Rightarrow \lambda_1 = 1$

$\Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar, d.h. der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ kann als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dargestellt werden

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(I) $-\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0$

(II) $\lambda_1 + \lambda_3 = -1$

(III) $\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 2$

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ das LGS ist unlösbar, d.h. der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kann nicht als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dargestellt werden

3

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

(I) $\lambda_1 + (t-1)\lambda_2 + t\lambda_3 = 1$

(II) $\lambda_2 + t\lambda_3 = 1$

(III) $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t-1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ für $t \neq 1$ lässt sich der Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen