

Linearkombinationen von Vektoren

Ansatz: $\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n$

Beispiele:

1) Ermitteln Sie, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden kann.

2) Ermitteln Sie, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden kann.

3) Prüfen Sie, ob es $t \in \mathbb{R}$ gibt, dass der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination der

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

Lösungen:

1)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(I) \quad \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$(II) \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

$$(III) \quad \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 4$$

$$\begin{array}{l} (I) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \\ (II) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \\ (III) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \\ (II) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \\ (III) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & | & 4 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow{(II)-(III)} \begin{array}{l} (I) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \\ (II) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \\ (III) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & | & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(III) \Rightarrow \lambda_3 = -1$$

$$(II) \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_2 = 2$$

$$(I) \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

\Rightarrow das LGS ist eindeutig lösbar, d.h. der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ kann als

Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} dargestellt werden

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(I) \quad -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 3$$

$$(II) \quad \lambda_1 + \lambda_3 = -1$$

$$(III) \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 2$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & | & 3 \\ 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 1 & 2 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & | & 3 \\ 0 & -1 & 1 & | & -2 \\ 0 & -3 & 3 & | & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & | & 3 \\ 0 & -1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow das LGS ist unlösbar, d.h. der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kann nicht als

Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} dargestellt werden

3)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(I) \quad \lambda_1 + (t-1)\lambda_2 + t\lambda_3 = 1$$

$$(II) \quad \lambda_2 + t\lambda_3 = 1$$

$$(III) \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & t-1 & t & | & 1 \\ 0 & 1 & t & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & t-1 & t & | & 1 \\ 0 & 1 & t & | & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & | & -1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow für $t \neq 1$ lässt sich der Vektor \vec{x} als Linearkombination der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} darstellen