Lösen von Exponential- und Logarithmusgleichungen

Beispiele:

1. $2^x = 8 \quad \Rightarrow x = 3$ "Probieren"

2. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} = \frac{27}{64} \quad \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

3. $2^{3x-2} = 2^7$ "Exponentenvergleich"
   $\Rightarrow 3x - 2 = 7 \quad \Rightarrow x = 3$

4. $5^x = 30$
   Auflösen nach x liefert:
   $x = \log_5 30$ (Logarithmus von 30 zur Basis 5)

Besondere Logarithmen:

a) Zehnerlogarithmus (Basis 10)
$\log_{10} 3 = \lg 3 \approx 0{,}47712$

b) Natürlicher Logarithmus (Basis e)
$\log_e 3 = \ln 3 \approx 1{,}0986$

Berechnung von Logarithmen mit anderer Basis mit Hilfe von lg bzw. ln:

$$\log_c a = \frac{\lg a}{\lg c} = \frac{\ln a}{\ln c}$$

Beispiel: $\log_5 30 = \frac{\lg 30}{\lg 5} \approx 2{,}1133$

Rechenregeln für den Logarithmus

(1) $\log_a a = 1 \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

(2) $\log_a 1 = 0 \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

(3) $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\};\ u, v \in \mathbb{R}^+$

(4) $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\};\ u, v \in \mathbb{R}^+$

(5) $\log_a u^v = v \cdot \log_a u \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\};\ u \in \mathbb{R}^+;\ v \in \mathbb{R}$

<u>Aufgaben:</u>

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}2$

   $x = \log_{0{,}5} 0{,}2 \approx 2{,}3219$

2. $2^{x-1} = 35$

   $x - 1 = \log_2 35 \quad \Rightarrow x = \log_2 35 + 1 \approx 6{,}1293$

3. $\frac{1}{4} \cdot 5^{y+2} = 250$

   $5^{y+2} = 1000 \quad \Rightarrow y + 2 = \log_5 1000 \quad \Rightarrow y = \log_5 1000 - 2 \approx 2{,}2920$

4. $4^{3z-2} = 4^{z+1}$

   $3z - 2 = z + 1 \quad \Rightarrow 2z = 3 \quad \Rightarrow z = \frac{3}{2}$

5. $2^{3x-1} = 5^{x+1} \,\big|\, \lg$

   $\lg(2^{3x-1}) = \lg(5^{x+1}) \quad \Rightarrow (3x-1) \cdot \lg 2 = (x+1) \cdot \lg 5$

   $3x \cdot \lg 2 - \lg 2 = x \cdot \lg 5 + \lg 5 \quad \Rightarrow 3x \cdot \lg 2 - x \cdot \lg 5 = \lg 5 + \lg 2$

   $x(3\lg 2 - \lg 5) = \lg 5 + \lg 2 \quad \Rightarrow x = \frac{\lg 5 + \lg 2}{3\lg 2 - \lg 5} \approx 4{,}8991$

6. $\log_4 x = 0{,}5 \qquad D = \frown^{+}$

   $x = 4^{0{,}5} = 2$

7. $\log_7(4 - x) = 80 \qquad D = \left]-\infty; 4\right[$

   $4 - x = 7^{80} \quad \Rightarrow x = 4 - 7^{80} \approx -4{,}05 \cdot 10^{67}$

8. $\ln(x + 3) = 7{,}56 \qquad D = \left]-3; \infty\right[$

   $x + 3 = e^{7{,}56} \quad \Rightarrow x = e^{7{,}56} - 3 \approx 1916{,}8455$

9. $2\lg x = \lg(4x - 3)$

   Definitionsmenge:

   $x > 0 \quad \wedge \quad 4x - 3 > 0 \quad \Rightarrow x > 0 \quad \wedge \quad x > \frac{3}{4}$

   $\Rightarrow D = \left]\frac{3}{4}; \infty\right[$

   $2\lg x = \lg(4x - 3) \quad \Rightarrow \lg x^2 = \lg(4x - 3)$

   $x^2 = 4x - 3 \quad \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0$

   $\Rightarrow x_1 = 1 \qquad x_2 = 3$