Matrizen

1. Matrix als Zahlenschema

Beispiel:
Eine Elektronikhandelskette bietet in ihren Filialen drei verschiedene Modelle von Digitalkameras eines bestimmten Herstellers an. Die folgende Tabelle zeigt den Lieferumfang für den Monat November an die Filialen in Augsburg, München, Nürnberg und Regensburg.

	D4000	D5000	D6000
Augsburg	40	20	10
München	70	50	35
Nürnberg	40	30	15
Regensburg	30	25	15

Für Berechnungen mit einem Computer sind nur die Verkaufszahlen interessant. Man verzichtet daher auf die Angabe des Modelltyps und der Filialen und notiert die Tabelle in Form eines Kurzschemas.

$$\begin{pmatrix} 40 & 20 & 10 \\ 70 & 50 & 35 \\ 40 & 30 & 15 \\ 30 & 25 & 15 \end{pmatrix}$$

Ein solches Zahlenschema bezeichnet man als Matrix. Die obige Matrix besteht aus 4 Zeilen und 3 Spalten und wird deshalb als (4x3)-Matrix bezeichnet.

Allgemein gilt:
Ein Zahlenschema A aus Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit m Zeilen und n Spalten heißt (m x n)-Matrix.
Eine Matrix heißt quadratisch, wenn sie genauso viele Zeilen wie Spalten besitzt, d.h. wenn m = n gilt.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad m, n \in \mathbb{N}$$

2. Addieren und Vervielfachen von Matrizen

Zwei (m x n)-Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ werden addiert, indem man die Matrizenelemente mit gleichem Index addiert.
Die Matrixelemente c_{ij} der Summenmatrix C = A + B ergeben sich als $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 40 & 20 & 10 \\ 70 & 50 & 35 \\ 40 & 30 & 15 \\ 30 & 25 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 70 & 35 & 20 \\ 90 & 65 & 50 \\ 50 & 40 & 25 \\ 40 & 35 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 55 & 30 \\ 160 & 115 & 85 \\ 90 & 70 & 40 \\ 70 & 60 & 35 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

1.Die beiden Matrizen, die addiert werden sollen, müssen vom gleichen Typ sein, d.h. die Anzahl der Zeilen und Spalten muss bei den Matrizen übereinstimmen.

2. Die Matrizenaddition ist kommutativ und assoziativ
   A + B = B + A   A + (B + C) = (A + B) + C

3. Die Differenz zweier Matrizen berechnet man in gleicher Weise elementweise.

Eine (m x n)-Matrix $A = (a_{ij})$ wird mit einer reellen Zahl λ multipliziert, indem man alle Matrizenelemente mit der Zahl λ multipliziert.
Die Matrixelemente c_{ij} der Ergebnismatrix $C = \lambda \cdot A$ ergeben sich als $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

Beispiel:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 40 & 20 & 10 \\ 70 & 50 & 35 \\ 40 & 30 & 15 \\ 30 & 25 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 60 & 30 \\ 210 & 150 & 105 \\ 120 & 90 & 45 \\ 90 & 75 & 45 \end{pmatrix}$$

3. Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

Beispiel:
Eine Firma stellt drei verschiedene Produkte A, B und C her. Die Produkte durchlaufen während ihrer Herstellung drei verschiedene Werkstätten, eine Schreiner, eine Schlosser- und eine Kunststoffwerkstatt. Dabei wird zur Herstellung eines Stücks dieser Produkte jeweils eine bestimmte Anzahl von Arbeitsstunden in den einzelnen Werkstätten benötigt:

	A	B	C
Schreinerei	6	2	0
Schlosserei	4	3	3
Kunststoff	0	1	4

Es sollen nun 4 Stück des Produkts A, 3 Stück des Produkts B und 1 Stück des Produkts C hergestellt werden.
Bestimmen Sie, wie viele Arbeitsstunden in den einzelnen Werkstätten benötigt werden.

Schreinerwerkstatt: $6 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 30$

Schlosserwerkstatt: $4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 28$

Kunststoffwerkstatt: $0 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 7$

Verkürzte Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 28 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ausführliche Schreibweise für die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix für das obige Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 28 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Eine (m x n)-Matrix $A = (a_{ij})$ wird mit einem Vektor $\vec{b}$ (mit n Koordinaten) multipliziert, indem man jede Zeile der Matrix A mit dem Vektor $\vec{b}$ multipliziert.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 + \dots + a_{1n} \cdot b_n \\ a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 + \dots + a_{2n} \cdot b_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot b_1 + a_{m2} \cdot b_2 + \dots + a_{mn} \cdot b_n \end{pmatrix}$$

Das Produkt $A \cdot \vec{b}$ ist ein Vektor mit m Koordinaten.

Rechenregel: „Zeile mal Spalte“
Bemerkungen:

1. Die Multiplikation einer Matrix A mit einem Vektor $\vec{b}$ ist nur dann möglich, wenn die

Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Koordinaten von $\vec{b}$ übereinstimmt.

2.

Gesetzmäßigkeiten der Multiplikation von Vektoren

Unter der Voraussetzung, dass die Produkte der Matrizen mit den Vektoren bildbar sind, gilt für Matrizen A, B und für Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$:

a) $(A \pm B) \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{x} \pm B \cdot \vec{x}$

b) $A \cdot (\vec{x} \pm \vec{y}) = A \cdot \vec{x} \pm A \cdot \vec{y}$

<u>Aufgabe:</u>

Bestimmen Sie, wie viel Stück der Werkstücke A, B und C hergestellt werden können, wenn in der Schreinerwerkstatt 22 Stunden, in der Schlosserwerkstatt 33 Stunden und in der Kunststoffwerkstatt 22 Stunden benötigt werden.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6x_1 + 2x_2 + 0x_3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ 0x_1 + 1x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix}$$

(I) $6x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 22$

(II) $4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 33$

(III) $0x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 22$ "Lineares Gleichungssystem"

Einheitsmatrix

Die quadratische (n x n)-Matrix $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \ldots & 1 \end{pmatrix}$, bei der auf der Diagonalen die Zahl 1, sonst die Zahl 0 steht, heißt Einheitsmatrix (vom Typ n).
Die Einheitsmatrix verhält sich neutral bezüglich der Multiplikation mit einem Vektor $\vec{x}$ (mit n Koordinaten): $E_n \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Aufgabe:

Gegeben sind $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Matrix E – T und bilden Sie das Produkt $(E-T)\cdot\vec{x}$.

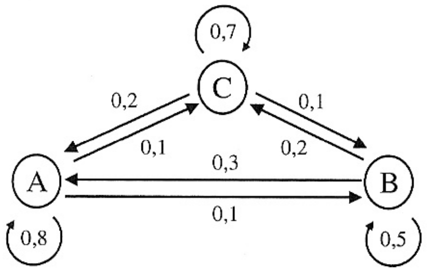
$$E - T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & +1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(E-T)\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & +1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Anwendungen

Beispiel:

In einer Kleinstadt konkurrieren drei Supermärkte A, B und C um einen als konstant angenommenen Kundenstamm. Durch eine längerfristige Befragung wurde das Wechselverhalten der Kunden von Monat zu Monat untersucht. Das Ergebnis ist unten in einem **Verflechtungsdiagramm** (auch Gozintograph genannt) dargestellt.



Der Grafik ist zum Beispiel zu entnehmen, dass von den derzeitigen Kunden des Marktes A im folgenden Monat 80 % wieder in A kaufen, jedoch jeweils 10% zu den Märkten B und C wechseln.

Übertragung der grafischen Darstellung in eine Tabelle:

		Abfluss		
		A	B	C
Zufluss	A	0,8	0,3	0,2
	B	0,1	0,5	0,1
	C	0,1	0,2	0,7

In den Zeilen ist der Zufluss an Kunden, in den Spalten die Abgabe von Kunden an die Konkurrenz notiert. B gibt zum Beispiel 30% seiner Kunden an A und 20% an C ab. B erhält aber auch 10% der Kunden von A und 10% der Kunden von C.

Zu der Tabelle gehört die untenstehende Matrixdarstellung, die man als **Übergangsmatrix** bezeichnet. Mit ihrer Hilfe lässt sich die Veränderung des Kundenverhaltens von Monat zu Monat berechnen.

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Zu Beginn der Untersuchung haben die Supermärkte folgende Marktanteile pro Monat:
A: 40%; B: 20%; C: 40%

Dieser Ausgangszustand kann durch einen Bestandsvektor $b_0 = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

Der prozentuelle Kundenanteil der einzelnen Märkte zum Beginn des nächsten Monats ergibt sich dann als

$$\vec{b_1} = M \cdot \vec{b_0} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}46 \\ 0{,}18 \\ 0{,}36 \end{pmatrix}$$

Aufgaben zu Matrizen

1. Gegeben sind die Matrizen $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie.
   a) $3\cdot A-2\cdot B$
   b) $C-2\cdot A+B$
   c) $C-2\cdot(A+B)$
   d) $3\cdot(A+B)-2\cdot C$

2. Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

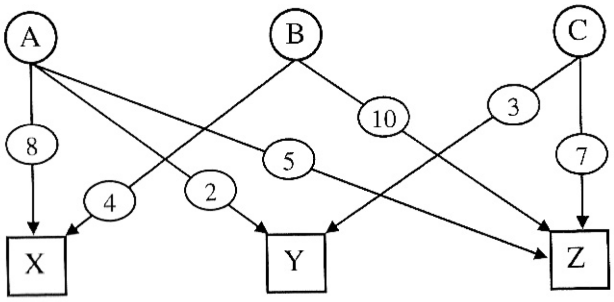
3. Bei einer Ausschreibung bieten drei Firmen A, B und C Tische, Stühle und Aktenschränke nach folgenden Preislisten an.

	Tisch	Stuhl	Schrank
Firma A	600 €	175 €	375 €
Firma B	490 €	210 €	420 €
Firma C	505 €	185 €	390 €

   a) Bestimmen Sie, welches Angebot das günstigste ist, wenn 12 Tische, 15 Stühle und 20 Aktenschränke angeschafft werden sollen.

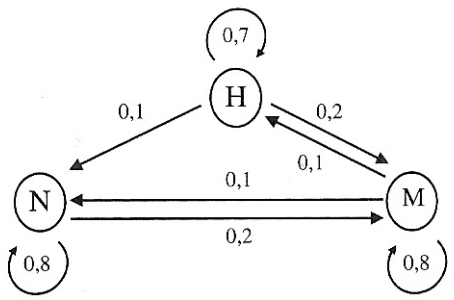
   b) Geben Sie ein Beispiel für eine Anschaffungsliste an, bei der die Firma A am günstigsten ist.

4. Die Herstellung von Waren A, B und C erfolgt an verschiedenen Standorten X-Stadt, Y-Stadt und Z-Stadt.
   Die Grafik zeigt den Arbeitsstundenbedarf der einzelnen Standorte X, Y und Z für die Waren.



   Ermitteln Sie, welche Arbeitszeiten für die Standorte einzuplanen sind, wenn 100 Stück der Ware A, 50 Stück der Ware B und 200 Stück von C benötigt werden.

5. Der Vorschlag eines Politikers zu einer umfassenden Steuerreform sieht vor, die Steuerzahler nur noch drei Einkommensgruppen (Niedrig, Mittel, Hoch) zuzuordnen und innerhalb dieser Gruppen einheitlich zu besteuern.
Jeweils zur Mitte des Jahres erfolgt eine neue Einordnung abhängig vom Einkommen des Vorjahres.
Für einen Landkreis mit 100000 Erwerbstätigen hat man über einen längeren Zeitraum untersucht, welche Verschiebungen zwischen den Gruppen auftreten.
Das untenstehende Diagramm gibt für jede Einkommensgruppe an, welche Anteile dieser Gruppe bei der Neueinstufung zur Jahresmitte die Gruppe wechseln bzw. in ihrer derzeitigen Gruppe bleiben.



a) Beschreiben Sie den Wechsel zwischen den Einkommensgruppen in Form einer Tabelle und geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an.

b) Berechnen Sie die prozentualen Anteile in den einzelnen Einkommensgruppen nach einem und nach zwei Jahren, wenn zu Beginn folgende Verteilung vorlag:

Niedrige Gruppe:	35000 Erwerbstätige
Mittlere Gruppe:	50000 Erwerbstätige
Hohe Gruppe:	15000 Erwerbstätige

Lösungen

1a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 9 \\ -7 & 15 & 2 \end{pmatrix}$

1b) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -9 & -2 \end{pmatrix}$

1c) $\begin{pmatrix} -12 & -4 & -1 \\ -1 & -14 & -3 \\ -10 & -9 & -8 \end{pmatrix}$

1d) $\begin{pmatrix} 18 & 5 & 1 \\ 1 & 21 & 3 \\ 14 & 13 & 12 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 22 \\ -1 \end{pmatrix}$

3a) $\begin{pmatrix} 600 & 175 & 375 \\ 490 & 210 & 420 \\ 505 & 185 & 390 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17325 \\ 17430 \\ 16635 \end{pmatrix}$

Das Angebot der Firma C ist das günstigste.

3b) Firma hat das günstigste Angebot, wenn z.B. 5 Tische, 30 Stühle und 15 Aktenschränke beschafft werden sollen.

4)

	A	B	C
X	8	4	0
Y	2	0	3
Z	5	10	7

$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 10 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \\ 2400 \end{pmatrix}$

Am Standort X müssen 1000 Arbeitsstunden eingeplant werden, am Standort Y 800 Stunden und am Standort Z 2400 Arbeitsstunden.

5a)

		Abgang		
Zugang		N	M	H
	N	0,8	0,1	0,1
	M	0,2	0,8	0,2
	H	0	0,1	0,7

Übergangsmatrix: $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$

5b)

$\vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}5 \\ 0{,}15 \end{pmatrix}$

$\vec{b}_1 = M \cdot \vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}345 \\ 0{,}5 \\ 0{,}155 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{b}_2 = M \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3415 \\ 0{,}5 \\ 0{,}1585 \end{pmatrix}$

Nach einem Jahr ergibt sich folgende prozentuale Verteilung:

Niedrige Gruppe: 34,5 % Mittlere Gruppe: 50 % Hohe Gruppe: 15,5 %

Nach zwei Jahren ergibt sich folgende prozentuale Verteilung:

Niedrige Gruppe: 34,15 % Mittlere Gruppe: 50 % Hohe Gruppe: 15,85 %