Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

Teil I: Stoffgebiete der Mittelstufe

Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ | $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$

Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Lösungsformel für die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Potenzen und Wurzeln

$a^0 = 1$ $\quad a^1 = a$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ $\quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\quad \left(a^x\right)^z = a^{x \cdot z}$

$a^x \cdot a^z = a^{x+z}$ $\quad \frac{a^x}{a^z} = a^{x-z}$ $\quad a^x \cdot b^x = (ab)^x$ $\quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ $\quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ $\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Geradengleichung

$y = m \cdot x + t$ (allgemeine Form)

$y = m \cdot (x - x_0) + y_0$ (Punkt-Steigungsform)

Schnittwinkel zweier Geraden $\tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$

Parabelgleichung

$y = ax^2 + bx + c$ (allgemeine Form)

$y = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ (Scheitelform)

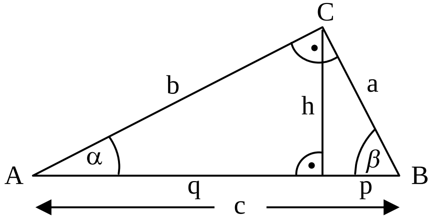
$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ (Linearfaktorform)

Logarithmen $\log_b(a) = z \Leftrightarrow b^z = a$

$\log_b(u\,v) = \log_b(u) + \log_b(v)$ $\qquad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$

$\log_b\left(u^z\right) = z \cdot \log_b(u)$ $\qquad \log_c(a) = \frac{\log_b(a)}{\log_b(c)}$

Rechtwinkliges Dreieck



Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $h^2 = p\,q$

Kathetensatz: $a^2 = c\,p\,;\ b^2 = c\,q$

$\sin\alpha = \frac{a}{c};\quad \cos\alpha = \frac{b}{c};\quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$

Allgemeines Dreieck

Sinussatz: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$

Kosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

Sinus und Kosinus

$(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ $\qquad$ $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$

$\sin(90° - \varphi) = \cos\varphi$ $\qquad$ $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$

$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ $\qquad$ $\cos 2\varphi = (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2$

$(\sin\frac{\varphi}{2})^2 = \frac{1}{2}\cdot(1-\cos\varphi)$ $\qquad$ $(\cos\frac{\varphi}{2})^2 = \frac{1}{2}\cdot(1+\cos\varphi)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$

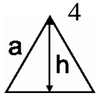
Flächengeometrie

A : Flächeninhalt $\qquad$ **U :** Umfang

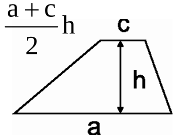
Allgemeines Dreieck: $A = \frac{1}{2}g\,h$

Kreis: $U = 2r\pi$; $A = r^2\pi$

Gleichseitiges Dreieck: $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$



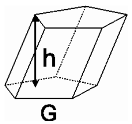
Trapez: $A = \frac{a+c}{2}h$



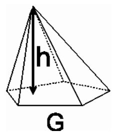
Raumgeometrie

V : Volumen $\qquad$ **M** : Mantelfläche
O : Oberfläche $\qquad$ **G** : Grundfläche

Prisma: $V = G\,h$



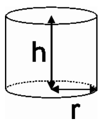
Pyramide: $V = \frac{1}{3}G\,h$



gerader Kreiszylinder:

$V = r^2\pi h$;

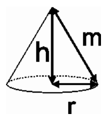
$M = 2r\pi h$



gerader Kreiskegel:

$V = \frac{1}{3}r^2\pi h$;

$M = r\pi m$



Kugel: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$; $O = 4r^2\pi$

Teil II: Analysis

Grenzwerte

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^r} = 0\,; \qquad \lim_{x\to 0}\left(x^r\cdot\ln x\right) = 0 \qquad (\text{jeweils } r > 0)$$

Definition der Ableitung

Ableitung: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,

falls der Grenzwert existiert und endlich ist.

Schreibweisen: $f'(x) = y' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$; $\qquad \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$

Ableitung der Grundfunktionen

$(x^r)' = r\cdot x^{r-1}$ $\qquad$ $(\frac{1}{x^r})' = -\frac{r}{x^{r+1}}$ $\qquad$ $(e^x)' = e^x$ $\qquad$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Ableitungsregeln

Summenregel: $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Faktorregel: $f(x) = c\cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = c\cdot u'(x)$

Produktregel: $f(x) = u(x)\cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)$

L`Hospitalsche Regeln

- Gilt z(a) = n(a) = 0 und existiert $\lim\limits_{x\to a}\frac{z'(x)}{n'(x)}$, so gilt $\lim\limits_{x\to a}\frac{z(x)}{n(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{z'(x)}{n'(x)}$
- Gilt $|z(x)| \to \infty$ und $|n(x)| \to \infty$ für $x \to a$ und existiert $\lim\limits_{x\to a}\frac{z'(x)}{n'(x)}$,

  so gilt $\lim\limits_{x\to a}\frac{z(x)}{n(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{z'(x)}{n'(x)}$
- Beide Regeln gelten in ähnlicher Weise auch für $|x| \to \infty$ (anstelle von $x \to a$)

Anwendungen der Differenzialrechnung

- Gleichung der Tangente im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$: $y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$
- Monotoniekriterium:

  $f'(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ f fällt streng monoton in I.

  $f'(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ f steigt streng monoton in I.
- Art von Extremwerten (mithilfe der zweiten Ableitung):

  $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ f hat an der Stelle x_0 ein relatives Minimum.

  $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ f hat an der Stelle x_0 ein relatives Maximum.
- Graphenkrümmung:

  $f''(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f ist in I rechtsgekrümmt.

  $f''(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f ist in I linksgekrümmt.
- Wendepunkt:

  Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.
- Terrassenpunkt:

  Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und wechselt $f''(x)$ an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Terrassenpunkt.

Newtonsche Iterationsformel

zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems

$f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$ $\Leftrightarrow$ G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse (f heißt dann *gerade Funktion*)

$f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$ $\Leftrightarrow$ G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung (f heißt dann *ungerade Funktion*)

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

1) Ist f eine in [a; b] stetige Funktion, so ist
   - die Integralfunktion $F_a : x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar
   - und F_a ist eine Stammfunktion von f, d.h. $F_a'(x) = f(x)$.

2) Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$.

Partielle Integration

$$\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = \left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b - \int\limits_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

Integration durch Substitution

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)\,dt \quad \text{mit } x = g(t)$$

Uneigentliche Integrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \;:=\; \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Volumen eines Rotationskörpers bei Rotation um die x-Achse

$$V=\pi\cdot\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

Wichtige unbestimmte Integrale

$$\int x^r dx=\frac{x^{r+1}}{r+1}+C \quad (r\neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$$

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C$$

$$\int e^x dx=e^x+C$$

$$\int \ln x\,dx=-x+x\ln x+C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\left|f(x)\right|+C$$

$$\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+C$$

$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$, wobei F Stammfunktion von f ist.

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}dx=\tan x+C$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2}dx=-\cot x+C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$ **(Kreisintegral)**

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$$

Teil III: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Gesetze der Mengenalgebra: $\overline{A}=\Omega\setminus A$; $A\cup\overline{A}=\Omega$; $A\cap\overline{A}=\{\ \}$; $\overline{\overline{A}}=A$; $A\setminus B=A\cap\overline{B}$

Gesetze von De Morgan: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

Unvereinbarkeit: $A\cap B=\{\ \}$

Ereigniswahrscheinlichkeiten: $P(\{\ \})=0$; $P(\Omega)=1$; $P(\overline{A})=1-P(A)$

Satz von Sylvester: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Unabhängigkeit von zwei Ereignissen: $P_A(B)=P(B)$
oder auch: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Fakultät: $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ldots\ \cdot 2\cdot 1$
Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Elemente in einer Reihe anzuordnen.

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$
Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge mit n Elementen Teilmengen mit k Elementen zu bilden.

Laplace-Experiment: Alle Elementarereignisse des zugehörigen Ergebnisraumes sind gleich wahrscheinlich.
Es gilt dann: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$

Zufallsgrößen – Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Die Zufallsgröße X nehme die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$
jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an. Dann gilt:

- **Erwartungswert:** $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$
- **Varianz:** $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$
  $= (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$

  Verschiebungsregel: $\mathrm{Var}(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2$
- **Standardabweichung:** $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Binomialverteilung

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Treffer in einer Bernoullikette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p.
Dann heißt die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung *Binomialverteilung*.
X heißt binomialverteilt, genauer B(n; p)-verteilt.

Ist die Zufallsgröße X binomialverteilt nach B(n; p), so gilt:

$P(X = k) = B(n;\, p;\, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ für k = 0, 1, ..., n

mit Erwartungswert $E(X) = n \cdot p$ und Varianz $\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Hypothesentest

Beim Testen der Nullhypothese H_0 im Signifikanztest können zwei Fehler auftreten:

Fehler 1. Art: H_0 wird abgelehnt, obwohl sie wahr ist.
Fehler 2. Art: H_0 wird angenommen, obwohl sie falsch ist.

Als *Signifikanzniveau* α des Tests bezeichnet man die größtmögliche noch akzeptierte Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

Normalverteilung

Dichtefunktion: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Verteilungsfunktion: $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

Standardnormalverteilung

Dichtefunktion: $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}$

Verteilungsfunktion: $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

Es gilt: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

(brauchbar für $n \cdot p \cdot (1-p) > 9$)

$B(n;p;k) \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)$ mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

$F(x) \approx \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{1}{2}}{\sigma}\right)$

Teil IV: Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 + a_{13} \cdot v_3 \\ a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + a_{23} \cdot v_3 \\ a_{31} \cdot v_1 + a_{32} \cdot v_2 + a_{33} \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Eigenschaften und Anwendungen des Skalarprodukts

- zueinander senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$
- Einheitsvektor: $\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$

Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Eigenschaften und Anwendungen des Vektorproduktes

- $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$
- Flächeninhalt F des Dreiecks ABC: $F = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$
- Volumen V der dreiseitigen Pyramide ABCD: $V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} \circ \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right) \right|$

Lineare Unabhängigkeit

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$ nur mit $\lambda = \mu = \nu = 0$ lösbar ist.

Alternativ gilt: $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \circ \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \neq 0$

Gerade im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$

- Punkt-Richtungsform: $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$
- Zwei-Punkte-Form: $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

Ebene im $\mathbb{R}^3$

Parameterformen

- Punkt-Richtungsform: $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$
- Drei-Punkte-Form: $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + \mu \cdot (\vec{c} - \vec{a})$

Parameterfreie Formen

- Koordinatenform: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$
- Achsenabschnittsform: $E: \dfrac{x_1}{s} + \dfrac{x_2}{t} + \dfrac{x_3}{u} = 1$
  Festlegung durch die Achsenschnittpunkte S(s| 0| 0), T(0| t| 0) und U(0| 0| u)
- Normalenform: $E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$