Normalenform der Ebenengleichung

Herleitung der Normalenform der Ebenengleichung:

Gegeben: $E: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$

Gesucht: Normalenform der Ebene E

Lösung: Multiplikation mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene
($\vec{n} \perp \vec{u}$ und $\vec{n} \perp \vec{v}$)

$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{n} = (\vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} \quad \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n} + s \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} + t \cdot \vec{v} \cdot \vec{n}$

$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$ (da $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ und $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$)

$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{a} \cdot \vec{n} = 0$

$\Rightarrow E: \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

Koordinatenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow n_1 \cdot (x_1 - a_1) + n_2 \cdot (x_2 - a_2) + n_3 \cdot (x_3 - a_3) = 0$$

$$\Rightarrow n_1 \cdot x_1 - n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot x_2 - n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot x_3 - n_3 \cdot a_3 = 0$$

$$\Rightarrow n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - (n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3) = 0$$

$$\Rightarrow n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 + n_0 = 0$$

Bemerkung:

Zur Bestimmung des Normalenvektors $\vec{n}$ der Ebene benötigt man das Vektorprodukt ($\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$).

Aufgaben:

Bestimmen Sie die Koordinatenform der folgenden Ebenen.

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Lösungen:

$$a)\ \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 26 \\ 39 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{n}_E^{\,*} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E: \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\Rightarrow E: 3(x_1 - 3) + 2(x_2 - 2) + 3(x_3 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow E: 3x_1 - 9 + 2x_2 - 4 + 3x_3 + 3 = 0 \qquad \Rightarrow E: 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 10 = 0$$

$$b)\ \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{n}_E^{\,*} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\Rightarrow E: 2(x_1 + 1) + x_2 - 1 - 2(x_3 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow E: 2x_1 + 2 + x_2 - 1 - 2x_3 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$$

$$c)\ \vec{n}_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 \\ -20 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{n}_E^{\,*} = \begin{pmatrix} 35 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E: \begin{pmatrix} 35 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\Rightarrow E: 35(x_1 - 2) + 20(x_2 + 3) + 2(x_3 - 5) = 0$$

$$\Rightarrow E: 35x_1 - 70 + 20x_2 + 60 + 2x_3 - 10 = 0 \qquad \Rightarrow E: 35x_1 + 20x_2 + 2x_3 - 20 = 0$$