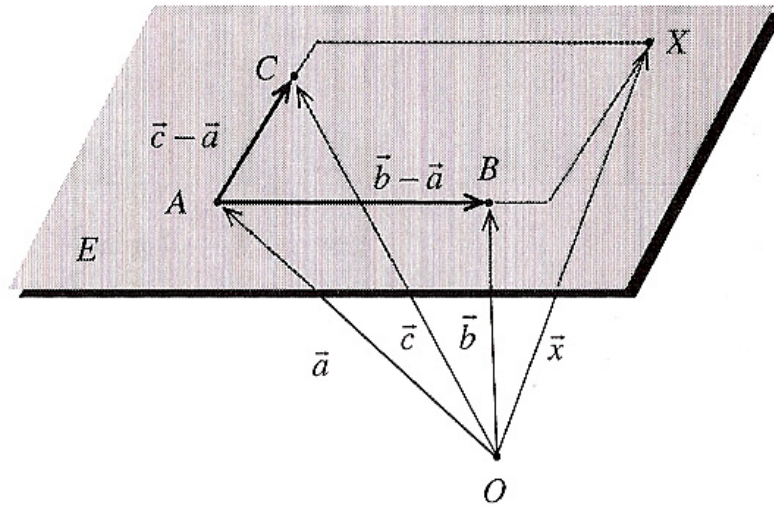


Parametergleichungen einer Ebene

(1) Die Drei-Punkte-Form einer Ebene:



Eine Ebene E ist eindeutig durch die Angabe dreier Punkte A, B und C, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, festgelegt.

$$E: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{AB} + t \cdot \vec{AC}$$

$$E: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + t \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \quad \text{mit } s, t \in \mathbb{R}$$

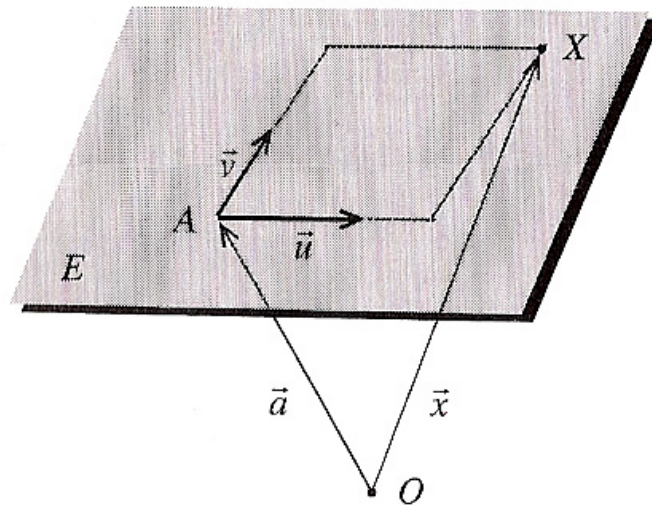
Beispiel:

Ermitteln Sie die Parametergleichung der Ebene E, die durch die Punkte A(2/1/-1), B(-2/3/0) und C(1/-3/2) festgelegt ist.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) Die Punkt-Richtungsform der Ebenengleichung:



Eine Ebene E im Anschauungsraum ist durch die Angabe eines Punktes A und zweier nicht paralleler Richtungen \vec{u} und \vec{v} eindeutig festgelegt.

$$E: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v} \quad \text{mit } s, t \in \mathbb{R} \text{ und } \vec{u}, \vec{v} \text{ linear unabhängig}$$

Anwendungen:

1) Aufstellen einer Ebene, die von zwei sich schneidenden Geraden g und h aufgespannt wird.

Aufhängepunkt der Ebene: beliebiger Punkt der Geraden g bzw. h

Richtungsvektoren der Ebene: Richtungsvektoren von g und h

Beispiel:

Stellen Sie die Parametergleichung der Ebene E auf, die von den zwei sich schneidenden

Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2) Aufstellen einer Ebene, die von zwei parallelen Geraden g und h aufgespannt wird.

Aufhängepunkt der Ebene: beliebiger Punkt der Geraden g bzw. h

Richtungsvektoren der Ebene: 1) Richtungsvektor der Geraden g bzw. h

2) Vektor von einem Punkt der Geraden g zu einem Punkt der Geraden h , z.B. Vektor zwischen den Aufhängepunkten von g und h

Beispiel:

Stellen Sie die Parametergleichung der Ebene E auf, die von den zwei parallelen

Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3) Aufstellen einer Ebene, die durch eine Gerade g und einen Punkt $P \notin g$ aufgespannt wird.

Aufhängepunkt der Ebene: beliebiger Punkt der Geraden g

Richtungsvektoren der Ebene: 1) Richtungsvektor der Gerade g

2) Vektor von einem Punkt der Geraden g zum Punkt P

Beispiel:

Stellen Sie die Parametergleichung der Ebene E auf, die von der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $P(3/4/6) \notin g$ aufgespannt wird.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$