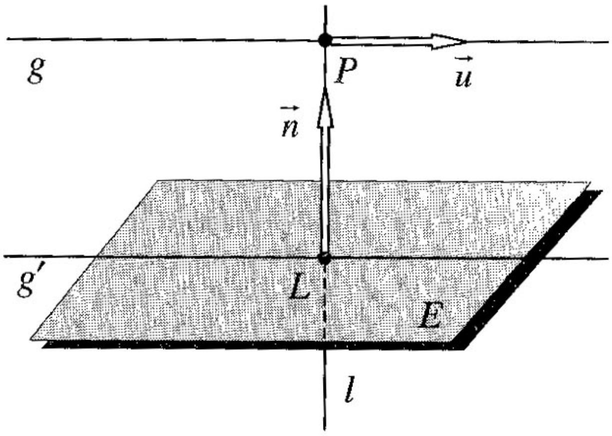
Projektion und Spiegelung

1. Projektion einer Geraden in eine parallele Ebene

Gegeben sind eine Ebene E und eine Gerade g, die zur Ebene E parallel ist. Gesucht ist die orthogonale Projektion der Geraden g in die Ebene E (siehe auch untenstehende Skizze).



Vorgehen:

a) Berechnen Sie für den Aufhängepunkt P der Geraden g den Fußpunkt L des Lotes auf E.

b) Die orthogonale Projektion g′ der Geraden g in die Ebene E hat dann die Gleichung: $g': \vec{x} = \vec{l} + s \cdot \vec{r}_g$

Beispiel:

Gesucht ist die orthogonale Projektion g′ von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

in die Ebene $E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$

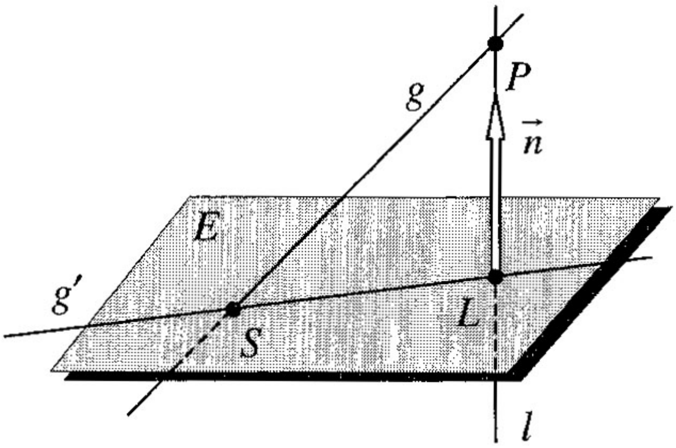
Lotgerade l aufstellen: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$l \cap E: (1+t) + 2(2t) - (1-t) = 6 \quad \Rightarrow t = 1$

$$\Rightarrow \vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow g': \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Projektion einer Geraden g in eine nicht parallele Ebene E

Gegeben sind eine Ebene E und eine Gerade g, die die Ebene E schneidet.
Gesucht ist die orthogonale Projektion der Geraden g in die Ebene E (siehe auch untenstehende Skizze).



Vorgehen:

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g und der Ebene E.
b) Berechnen Sie für den Aufhängepunkt P der Geraden g den Fußpunkt L des Lotes auf E (ist der Punkt P zufälligerweise bereits der Schnittpunkt S der Geraden g und der Ebene E, so muss man einen anderen Punkt auf g wählen).
c) Die orthogonale Projektion g′ der Geraden g in die Ebene E hat dann die Gleichung: $g': \vec{x} = \vec{s} + s \cdot \overrightarrow{SL}$.

Beispiel:

Gesucht ist für die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ die senkrechte Projektion in die

Ebene $E: x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 12 = 0$

$g \cap E:\ 3+3(9+4s)+2(5+s)-12=0 \quad \Rightarrow s=-2$

$$\Rightarrow \vec{s}=\begin{pmatrix}3\\9\\5\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow S(3/1/3)$$

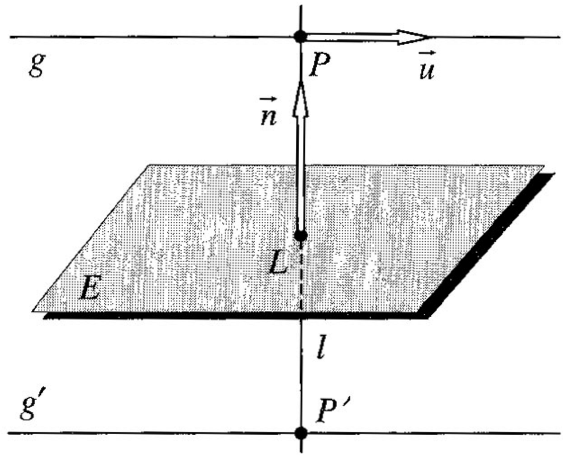
Lotgerade l aufstellen: $l:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\9\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$

$$l \cap E:\ 3+t+3(9+3t)+2(5+2t)-12=0 \quad \Rightarrow t=-2 \quad \Rightarrow \vec{l}=\begin{pmatrix}3\\9\\5\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g':\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}+s\left[\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}\right] \quad \Rightarrow g':\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}+s\left[\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}\right]$$

3. Spiegelung einer Geraden an einer parallelen Ebene

Gegeben sind eine Ebene E und eine Gerade g, die zur Ebene E parallel ist. Gesucht ist die Spiegelgerade der Geraden g, wenn man sie an der Ebene E spiegelt (siehe auch untenstehende Skizze).



Vorgehen:

a) Berechnen Sie für den Aufhängepunkt P der Geraden g den Fußpunkt L des Lotes auf E.

b) Berechnen Sie den Spiegelpunkt P′.
Für den Spiegelpunkt P\` gilt: $\vec{p'} = \vec{p} - 2 \cdot \overrightarrow{LP}$

c) Die gespiegelte Gerade hat dann die Gleichung $g' : \vec{x} = \vec{p'} + s \cdot \vec{r_g}$.

Beispiel:

Gesucht ist das Spiegelbild g′ der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ an der

Ebene $E : x_1 + x_2 - 2x_3 + 1 = 0$

Lotgerade l aufstellen: $l:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

$l\cap E:\;\; 3+t+t-2(-4-2t)+1=0 \quad \Rightarrow t=-2$

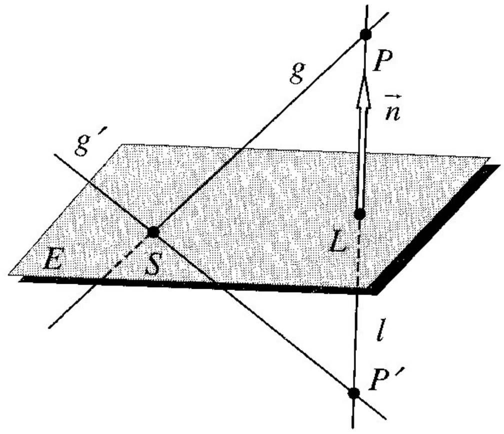
$$\Rightarrow \vec{l}=\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{p}'=\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}-2\left[\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g':\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

4. Spiegelung einer Geraden an einer nicht parallelen Ebene

Gegeben sind eine Ebene E und eine Gerade g, die die Ebene E schneidet. Gesucht ist die Spiegelgerade der Geraden g, wenn man sie an der Ebene E spiegelt (siehe auch untenstehende Skizze).



Vorgehen:

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E.
b) Spiegeln Sie den Aufhängepunkt P der Geraden g an der Ebene E (ist P zufälligerweise der Schnittpunkt der Geraden und der Ebene, dann spiegelt man einen anderen Punkt von g).
c) Die gespiegelte Gerade hat dann die Gleichung $g': \vec{x} = \vec{s} + s \cdot \overrightarrow{SP'}$.

Beispiel:

Gesucht ist das Spiegelbild g′ der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ an der

Ebene $E: x_1 + x_2 - x_3 = 2$

Schnittpunkt S bestimmen: g $\cap E:\ 7+5s+5+3s-(1-s)=2 \quad \Rightarrow s=-1$

$$\vec{s}=\begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

Lotgerade l aufstellen: $l:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$l\cap E:\ 7+t+5+t-(1-t)=2 \quad \Rightarrow t=-3$

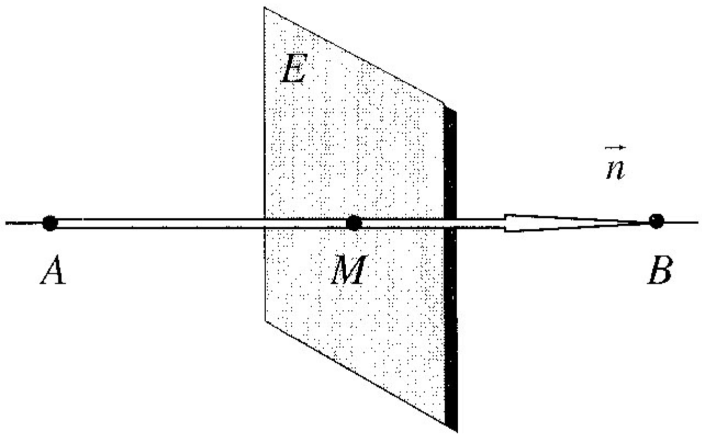
$$\vec{l}=\begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p'}=\begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix}-2\left[\begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g':\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+s\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right] \quad \Rightarrow g':\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\end{pmatrix}$$

5. Bestimmung der Symmetrieebene zu zwei gegebenen Punkten

Gegeben sind die Punkte A und B und gesucht ist die Symmetrieebene der Punkte A und B (siehe auch untenstehende Skizze).



Vorgehen:

a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M der Strecke [AB].
   (Zur Erinnerung: $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$)

b) Der Normalenvektor der gesuchten Ebene ist $\overrightarrow{AB}$.

c) Eine Gleichung der gesuchten Symmetrieebene E lautet damit:
   $E: \vec{n} \cdot \left[\vec{x} - \vec{m}\right] = 0$

Beispiel:

Gegeben sind die Punkte A(1/-1/-2) und B(3/5/4).
Bestimmen Sie die Symmetrieebene zu den beiden Punkten A und B.

Mittelpunkt M zwischen A und B bestimmen:

$$\overrightarrow{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor $\vec{\mathrm{n}}$ der Symmetrieebene bestimmen:

$$\vec{\mathrm{n}} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \overrightarrow{n^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Symmetrieebene E aufstellen:

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = 0 \quad \Rightarrow E: x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 11 = 0$$