

Quadratische Gleichungen

1. Reinquadratische Gleichungen

Beispiel:

$$x^2 = 171 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$|x| = \sqrt{171}$$

$$x_1 = -\sqrt{171} \quad x_2 = \sqrt{171}$$

$$IL = \{-\sqrt{171}; \sqrt{171}\}$$

Gleichungen der Form $ax^2 + b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ nennt man auch reinquadratische Gleichungen.

Aufgaben:

1 $2x^2 - 27 = 0$

2 $(x+4)(x-4) = 345$

3 $(5x-3)^2 - 225 = 488 + (5-3x)^2$

4 $8+x = \frac{1380}{x-8} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{8\}$

5 $(x+2)(x-3) - (2x-1)^2 = (x+1)(x+2)$

Lösungen zu den Aufgaben:

1 $2x^2 - 27 = 0 \Rightarrow x^2 = 13,5 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{13,5} \quad x_2 = \sqrt{13,5}$

$$IL = \left\{ -\sqrt{13,5}; \sqrt{13,5} \right\}$$

2 $(x+4)(x-4) = 345$

$$x^2 - 16 = 345 \Rightarrow x^2 = 361 \Rightarrow x_1 = -19 \quad x_2 = 19$$

$$IL = \left\{ -19; 19 \right\}$$

3 $(5x-3)^2 - 225 = 488 + (5-3x)^2$

$$25x^2 - 30x + 9 - 225 = 488 + 25 - 30x + 9x^2$$

$$25x^2 - 216 = 9x^2 + 513 \Rightarrow 16x^2 = 729 \Rightarrow x^2 = \frac{729}{16} \Rightarrow x_1 = -\frac{27}{4} \quad x_2 = \frac{27}{4}$$

$$IL = \left\{ -\frac{27}{4}; \frac{27}{4} \right\}$$

4 $8+x = \frac{1380}{x-8} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{8\}$

$$(8+x)(x-8) = 1380 \Rightarrow x^2 - 64 = 1380 \Rightarrow x^2 = 1444 \Rightarrow x_1 = -38 \quad x_2 = 38$$

$$IL = \left\{ -38; 38 \right\}$$

5 $(x+2)(x-3) - (2x-1)^2 = (x+1)(x+2)$

$$x^2 - x - 6 - (4x^2 - 4x + 1) = x^2 + 3x + 2$$

$$-3x^2 + 3x - 7 = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow -4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = -\frac{9}{4} \Rightarrow IL = \emptyset$$

2. Gemischtquadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ nennt man auch gemischtquadratische Gleichung.

Eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ kann mit Hilfe folgender Formel gelöst werden:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Den Term $(b^2 - 4ac)$ nennt man Diskriminante.

Beispiel:

$$x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-8 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{-8 + 6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-8 - 6}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

$$IL = \{-1; 7\}$$

Aufgaben:

1 $x^2 + 2x - 15 = 0$

2 $2x^2 - 3x - 9 = 0$

3 $3x^2 = 5x + 2 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0$

4 $x^2 + 2x = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$

5 $4x^2 - 4x + 1 = 0$

6 $3 + 2x + x^2 = 0$

7 $2 + 9x + 4x^2 = 0$

8 $4x^2 + 5 = 8x$

9 $x^2 + 6x = -9$

Für die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung

$ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ gilt:

$D > 0$: zwei Lösungen $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$D = 0$: eine Lösung $x = -\frac{b}{2a}$

$D < 0$: keine Lösung

D ist die Diskriminante ($b^2 - 4ac$)

Lösungen zu den Aufgaben:

1 $x^2 + 2x - 15 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 8}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{-2 - 8}{2} = -5 \quad \Rightarrow \text{IL} = \{-5; 3\}$$

2 $2x^2 - 3x - 9 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{3 \pm 9}{4}$$

$$x_1 = \frac{3 + 9}{4} = 3 \quad x_2 = \frac{3 - 9}{4} = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \text{IL} = \left\{ -\frac{3}{2}; 3 \right\}$$

3 $3x^2 = 5x + 2 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = \frac{5 + 7}{6} = 2 \quad x_2 = \frac{5 - 7}{6} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \text{IL} = \left\{ -\frac{1}{3}; 2 \right\}$$

4 $x^2 + 2x = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{2} \quad x_2 = -1 - \sqrt{2} \quad \Rightarrow \text{IL} = \{-1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}\}$$

5 $4x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \text{IL} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

6 $3 + 2x + x^2 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} \quad \Rightarrow \text{IL} = \emptyset$$

7 $2 + 9x + 4x^2 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 32}}{8} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{8} = \frac{-9 \pm 7}{8}$$

$$x_1 = \frac{-9 + 7}{8} = -\frac{1}{4} \quad x_2 = \frac{-9 - 7}{8} = -2 \quad \Rightarrow \text{IL} = \left\{ -2; -\frac{1}{4} \right\}$$

8 $4x^2 + 5 = 8x \Rightarrow 4x^2 - 8x + 5 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 80}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{-16}}{8} \quad \Rightarrow \text{IL} = \emptyset$$

9 $x^2 + 6x = -9 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2} = -3 \quad \Rightarrow \text{IL} = \{-3\}$$

Lösungsverfahren für spezielle quadratische Gleichungen

(1) Ausklammern

Beispiele:

$$1 \quad x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -4 \Rightarrow \text{IL} = \{-4; 0\}$$

$$2 \quad x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \Rightarrow \text{IL} = \{0; 1\}$$

$$3 \quad 4x^2 - 6x = 3x \Rightarrow 4x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x(4x-9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \text{IL} = \left\{0; \frac{9}{4}\right\}$$

(2) Zerlegung in Faktoren

Beispiele:

$$1 \quad x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -2 \Rightarrow \text{IL} = \{-2; 3\}$$

$$2 \quad x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = -5 \quad x_2 = 3 \Rightarrow \text{IL} = \{-5; 3\}$$

Wenn die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ die Lösungsmenge $\{x_1, x_2\}$ besitzt, so gilt:

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 \cdot x_2 = c \quad (\text{Satz von Vieta})$$

$$3 \quad x^2 - 14x + 45 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-9) = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \quad x_2 = 9 \Rightarrow \text{IL} = \{5; 9\}$$

$$4 \quad x^2 - 11x + 30 = 0 \Rightarrow (x-5)(x-6) = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \quad x_2 = 6 \Rightarrow \text{IL} = \{5; 6\}$$

$$5 \quad x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+5) = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \quad x_2 = -5 \Rightarrow \text{IL} = \{-5; 4\}$$

(3) Substitution

Beispiele:

1 $9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$ "Biquadratische Gleichung"

Substitution: $z = x^2$

$$\Rightarrow 9z^2 - 37z + 4 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{37 \pm \sqrt{(-37)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{18} = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 144}}{18} = \frac{37 \pm \sqrt{1225}}{18} = \frac{37 \pm 35}{18}$$

$$z_1 = \frac{37+35}{18} = 4 \quad z_2 = \frac{37-35}{18} = \frac{1}{9}$$

Resubstitution:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = 2$$

$$x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{3} \quad x_4 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{IL} = \left\{ -2; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 2 \right\}$$

2 $x^4 + 144 = 25x^2 \Rightarrow x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

Substitution: $z = x^2$

$$\Rightarrow z^2 - 25z + 144 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2}$$

$$z_1 = \frac{25+7}{2} = 16 \quad z_2 = \frac{25-7}{2} = 9$$

Resubstitution:

$$x^2 = 16 \Rightarrow x_1 = -4 \quad x_2 = 4$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x_3 = -3 \quad x_4 = 3$$

$$\Rightarrow \text{IL} = \{-4; -3; 3; 4\}$$