Quadratische Gleichungen mit Formvariablen

Beispiele:

1 Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Lösungen der quadratischen Gleichung

$x^2-3bx+2b^2=0$ mit $b\in\mathbb{R}$.

$$x_{1/2}=\frac{3b\pm\sqrt{9b^2-4\cdot1\cdot2b^2}}{2}=\frac{3b\pm\sqrt{9b^2-8b^2}}{2}=\frac{3b\pm\sqrt{b^2}}{2}=\frac{3b\pm b}{2}$$

$$x_1=\frac{3b+b}{2}=2b \qquad x_2=\frac{3b-b}{2}=b$$

$b=0$: die quadratische Gleichung hat eine Lösung bei $x = 0$

$b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$: die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen bei $x_1 = b$ und $x_2 = 2b$

2 Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Lösungen der quadratischen Gleichung

$t^2x^2-2tx=t^2-1$ mit $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$t^2x^2-2tx-t^2+1=0$$

$$x_{1/2}=\frac{2t\pm\sqrt{4t^2-4\cdot t^2\cdot(-t^2+1)}}{2t^2}=\frac{2t\pm\sqrt{4t^2+4t^4-4t^2}}{2t^2}=\frac{2t\pm\sqrt{4t^4}}{2t^2}=\frac{2t\pm2t^2}{2t^2}$$

$$x_1=\frac{2t+2t^2}{2t^2}=\frac{1}{t}+1 \qquad x_2=\frac{2t-2t^2}{2t^2}=\frac{1}{t}-1$$

$t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$: die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen bei $x_1 = \frac{1}{t}+1$ und $x_2 = \frac{1}{t}-1$

3 Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Lösungen der quadratischen Gleichung

$x^2-6x+k=0$ mit $k\in\mathbb{R}$.

$$x_{1/2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot1\cdot k}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4k}}{2}$$

$36-4k=0 \ \Rightarrow k=9$: die quadratische Gleichung hat eine Lösung bei $x = 3$

$36-4k>0 \ \Rightarrow k<9$: die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen bei

$$x_1 = \frac{6+\sqrt{36-4k}}{2} \text{ und } x_2 = \frac{6-\sqrt{36-4k}}{2}$$

$36-4k<0 \ \Rightarrow k>9$: die quadratische Gleichung hat keine Lösung

4 Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2+16x+t-1=0$ mit $t\in\mathbb{R}$.

$$x_{1/2}=\frac{-16\pm\sqrt{256-4\cdot1\cdot(t-1)}}{2}=\frac{-16\pm\sqrt{260-4t}}{2}$$

$260-4t=0 \quad\Rightarrow t=65:$ die quadratische Gleichung hat eine Lösung bei x = -8

$260-4t>0 \quad\Rightarrow t<65:$ die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen bei

$$x_1=\frac{-16+\sqrt{260-4t}}{2} \text{ und } x_2=\frac{-16-\sqrt{260-4t}}{2}$$

$260-4t<0 \quad\Rightarrow t>65:$ die quadratische Gleichung hat keine Lösung

5 Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Lösungen der quadratischen Gleichung $4x^2-4mx+m^2=0$ mit $m\in\mathbb{R}$.

$$x_{1/2}=\frac{4m\pm\sqrt{16m^2-4\cdot4\cdot m^2}}{8}=\frac{4m\pm\sqrt{16m^2-16m^2}}{8}=\frac{1}{2}m$$

Die quadratische Gleichung hat für alle $m\in\mathbb{R}$ eine Lösung bei x = $\frac{1}{2}m$

6 Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2+(a+2)x+2=0$ mit $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$x_{1/2}=\frac{-(a+2)\pm\sqrt{a^2+4a+4-4\cdot a\cdot2}}{2a}=\frac{-(a+2)\pm\sqrt{a^2-4a+4}}{2a}=$$

$$=\frac{-(a+2)\pm\sqrt{(a-2)^2}}{2a}=\frac{-(a+2)\pm(a-2)}{2a}$$

$$x_1=\frac{-a-2+a-2}{2a}=-\frac{2}{a} \qquad x_2=\frac{-a-2-a+2}{2a}=-1$$

$a=2:$ die quadratische Gleichung hat eine Lösung bei x = -1

$a\in\mathbb{R}\setminus\{0;2\}:$ die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen bei

$$x_1=-\frac{2}{a} \text{ und } x_2=-1$$

7 Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Lösungen der quadratischen Gleichung

$(a+1)x^2+ax-1=0$ mit $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$$x_{1/2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4\cdot(a+1)\cdot(-1)}}{2(a+1)}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4a+4}}{2(a+1)}=\frac{-a\pm\sqrt{(a+2)^2}}{2(a+1)}=$$

$$=\frac{-a\pm(a+2)}{2(a+1)}$$

$$x_1=\frac{-a+a+2}{2(a+1)}=\frac{1}{a+1} \qquad x_2=\frac{-a-a-2}{2(a+1)}=-1$$

$a=-2$: die quadratische Gleichung hat eine Lösung bei x = -1

$a\in\mathbb{R}\setminus\{-2;-1\}$: die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen bei

$$x_1=\frac{1}{a+1} \text{ und } x_2=-1$$