Stetige Fortsetzung von Funktionen

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2 + x}{x} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

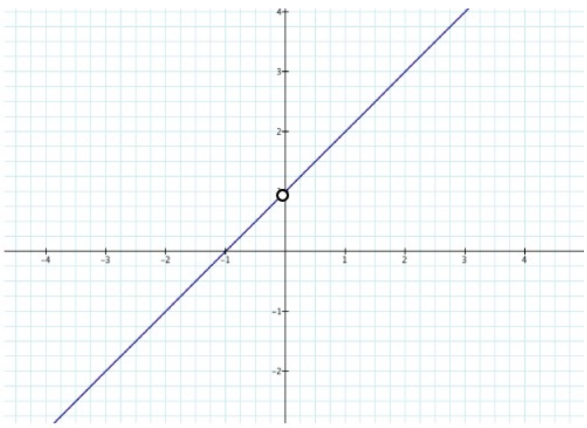
An der Stelle $x_0 = 0$ ist keine Aussage über Stetigkeit möglich, da $x_0 = 0 \notin D_f$

Grenzwertbetrachtung in der Umgebung x = 0:

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{x} = x + 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x+1) = 1 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x+1) = 1$$

Graph:



Da der Grenzwert in der Umgebung x = 0 übereinstimmt, kann diese Funktion stetig fortgesetzt werden.

Stetige Fortsetzung von f(x):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Eine Funktion f sei beiderseits der Stelle x_0, nicht jedoch an der Stelle x_0 selbst definiert. Die Funktion f heißt an der Stelle x_0 stetig fortsetzbar, wenn es eine Funktion $\tilde{f}$ gibt, die in D_f mit f übereinstimmt und an der Stelle x_0 stetig ist.

Aufgaben:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-48}{2x-12}$ $D_f=\mathbb{R}\left|\{6\}\right.$

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+8}{2} & \textit{für} \quad x>3\\ \\ \dfrac{x-4}{2} & \textit{für} \quad x<3\end{cases}$

3) $f(x)=\dfrac{2x^2-2x-12}{x+4}$ $D_f=\mathbb{R}\left|\{-4\}\right.$

4) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{x+3}$ $D_f=\mathbb{R}\left|\{-3\}\right.$

5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{2} & \textit{für} \quad x>-1\\ \\ x^2-x-1{,}5 & \textit{für} \quad x<-1\end{cases}$

Lösungen zu den Aufgaben:

1)

$$f(x) = \frac{(x+8)(x-6)}{2(x-6)} = \frac{x+8}{2}$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 6}\left(\frac{x+8}{2}\right) = 7 \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} 6}\left(\frac{x+8}{2}\right) = 7$$

$\Rightarrow$ f(x) ist stetig fortsetzbar bei x = 6

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-48}{2x-12} & \text{für } x \neq 6 \\ 7 & \text{für } x = 6 \end{cases}$$

2)

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 3}\left(\frac{x-4}{2}\right) = -0,5 \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} 3}\left(\frac{x+8}{2}\right) = 5,5$$

$\Rightarrow$ f(x) ist nicht stetig fortsetzbar bei x = 3

3)

$$f(x) = \frac{2(x+2)(x-3)}{x+4}$$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -4}\left(\dfrac{2(x+2)(x-3)}{x+4}\right)$ existiert nicht $\quad \Rightarrow$ f(x) $\to$ -∞ für x $\overset{<}{\to}$ -4

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -4}\left(\dfrac{2(x+2)(x-3)}{x+4}\right)$ existiert nicht $\quad \Rightarrow$ f(x) $\to$ +∞ für x $\overset{>}{\to}$ -4

$\Rightarrow$ f(x) ist nicht stetig fortsetzbar bei x=-4

4)

$$f(x) = \frac{(x-5)(x+3)}{x+3} = x-5$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -3}(x-5) = -8 \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} -3}(x-5) = -8$$

$\Rightarrow$ f(x) ist stetig fortsetzbar bei x = -3

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-15}{x+3} & \text{für } x \neq -3 \\ -8 & \text{für } x = -3 \end{cases}$$

5)

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} (x^2 - x - 1,5) = 0,5 \qquad \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(\frac{x+2}{2}\right) = 0,5$$

$\Rightarrow$ f(x) ist stetig fortsetzbar bei x = -1

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{2} & \textit{für} \quad x > -1 \\ 0,5 & \textit{für} \quad x = 1 \\ x^2 - x - 1,5 & \textit{für} \quad x < -1 \end{cases}$$