Jochen Weber

Rechnen mit Quadratwurzeln

Definition:

Sei $a \in \mathbb{R}_0^+$. Die Quadratwurzel aus a ist diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt.

Man schreibt dafür $\sqrt{a}$ und damit gilt: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Beispiel: Gegeben ist ein Rechteck mit der Länge 3 LE und Breite 2 LE

Berechnung des Flächeninhalts des Rechtecks:

$A = 2 \cdot 3 = 6$ FE

$A = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{36} = 6$ FE

Multiplikationsregel:

Für beliebige a, b ≥ 0 gilt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

Divisionsregel:

Für beliebige a, b ≥ 0 und b > 0 gilt: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Berechnung des Umfangs des Rechtecks:

$U = 2 + 3 + 2 + 3 = 10$ LE

$U = \sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{4} + \sqrt{9} \neq \sqrt{4 + 9 + 4 + 9} = \sqrt{26} \approx 5{,}099$ LE

Vorsicht: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b}$

Aufgaben:

1 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$

2 $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$

3 $\sqrt{\frac{5}{3}}:\sqrt{\frac{80}{3}}$

4 $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{32}}{\sqrt{6}}$

5 $\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}$

6 $\left(5\cdot\sqrt{2}\right)^2$

7 $\left(7\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)^2$

8 $\left(8\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2$

9 $\sqrt{5}+2\sqrt{5}$

10 $\sqrt{c}-\frac{5}{2}\sqrt{c}$

11 $3\sqrt{11}+2\sqrt{11}-4\sqrt{11}$

Zusammenhang zwischen Quadrieren und Wurzelziehen:

- Für alle $a\in\mathbb{R}_0^+$ gilt: $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$
- Für alle $a\in\mathbb{R}$ gilt: $\sqrt{a^2}=|a|$

<u>Lösungen zu den Aufgaben:</u>

1 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$

2 $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}=\sqrt{1}=1$

3 $\sqrt{\frac{5}{3}}:\sqrt{\frac{80}{3}}=\sqrt{\frac{5}{3}:\frac{80}{3}}=\sqrt{\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{80}}=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$

4 $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{32}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{96}{6}}=\sqrt{16}=4$

5 $\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}=\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{16}+\sqrt{4}=4+2=6$

6 $\left(5\cdot\sqrt{2}\right)^2=5^2\cdot\sqrt{2}^2=25\cdot 2=50$

7 $\left(7\sqrt{2}+3\sqrt{5}\right)^2=\left(7\sqrt{2}\right)^2+2\cdot 7\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{5}+\left(3\sqrt{5}\right)^2=$

$49\cdot 2+42\cdot\sqrt{10}+9\cdot 5=98+42\sqrt{10}+45=143+42\sqrt{10}$

8 $\left(8\sqrt{5}-3\sqrt{2}\right)^2=\left(8\sqrt{5}\right)^2-2\cdot 8\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}+\left(3\sqrt{2}\right)^2=$

$64\cdot 5-48\cdot\sqrt{10}+9\cdot 2=320-48\sqrt{10}+18=338-48\sqrt{10}$

9 $\sqrt{5}+2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

10 $\sqrt{c}-\frac{5}{2}\sqrt{c}=-\frac{3}{2}\sqrt{c}$

11 $3\sqrt{11}+2\sqrt{11}-4\sqrt{11}=\sqrt{11}$

Anwendungen der Rechenregeln

(1) Teilweises Wurzelziehen (teilweises Radizieren)

Beispiel: $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{2}$

Aufgaben:

1 $\sqrt{8}$

2 $\sqrt{75}$

Die Variablen in den folgenden Aufgaben stellen positive Zahlen dar.

3 $\sqrt{b^3}$

4 $\sqrt{a^2 b}$

5 $\sqrt{9x^2 + 16x^2}$

6 $\sqrt{a^2 + a^3}$

7 $\sqrt{\frac{5y^2}{4}}$

8 $\sqrt{\frac{pq}{3r}} : \sqrt{\frac{qr}{27p}}$

9 $\sqrt{\frac{x^4 y^2}{484z^2}}$

10 $\sqrt{27p^3 q^2 r}$

11 $\sqrt{\frac{u^3 v}{w^2}}$

Lösungen zu den Aufgaben:

1 $\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2}$

2 $\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 3}=5\sqrt{3}$

Die Variablen in den folgenden Aufgaben stellen positive Zahlen dar.

3 $\sqrt{b^3}=\sqrt{b^2\cdot b}=b\sqrt{b}$

4 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

5 $\sqrt{9x^2+16x^2}=\sqrt{25x^2}=5x$

6 $\sqrt{a^2+a^3}=\sqrt{a^2(1+a)}=a\sqrt{1+a}$

7 $\sqrt{\frac{5y^2}{4}}=\frac{y}{2}\sqrt{5}$

8 $\sqrt{\frac{pq}{3r}}:\sqrt{\frac{qr}{27p}}=\sqrt{\frac{pq}{3r}:\frac{qr}{27p}}=\sqrt{\frac{pq}{3r}\cdot\frac{27p}{qr}}=\sqrt{\frac{9p^2}{r^2}}=\frac{3p}{r}$

9 $\sqrt{\frac{x^4y^2}{484z^2}}=\frac{x^2y}{22z}$

10 $\sqrt{27p^3q^2r}=3pq\sqrt{3pr}$

11 $\sqrt{\frac{u^3v}{w^2}}=\frac{u}{w}\sqrt{uv}$

(2) Faktor unter die Wurzel ziehen

Beispiel: $5\cdot\sqrt{3}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{75}$

Aufgaben:

1 $2\sqrt{2}$

2 $a\sqrt{2}$

3 $5\cdot\sqrt{a+b}$

4 $\frac{1}{b}\cdot\sqrt{b}$

Lösungen zu den Aufgaben:

1 $2\sqrt{2}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{8}$

2 $a\sqrt{2}=\sqrt{a^2\cdot 2}=\sqrt{2a^2}$

3 $5\cdot\sqrt{a+b}=\sqrt{25\cdot(a+b)}=\sqrt{25a+25b}$

4 $\frac{1}{b}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{\frac{b}{b^2}}=\sqrt{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}}$

(3) Rationalmachen des Nenners

Beispiel:

$\frac{2}{1+\sqrt{3}}$ Ziel: im Nenner soll eine rationale Zahl stehen

$$\frac{2\cdot(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})}=\frac{2-2\sqrt{3}}{1-3}=\frac{2-2\sqrt{3}}{-2}=-1+\sqrt{3}$$

Aufgaben:

1 $\frac{70}{\sqrt{7}}$

2 $\frac{3}{2\sqrt{5}}$

3 $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$

4 $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$

5 $\frac{6}{2\sqrt{3}-3}$

6 $\frac{2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$

Lösungen zu den Aufgaben:

1 $\frac{70}{\sqrt{7}} = \frac{70 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{70 \cdot \sqrt{7}}{7} = 10\sqrt{7}$

2 $\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{10}$

3 $\frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{3-\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$

4 $\frac{3}{2-\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot (2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{3 \cdot (2+\sqrt{3})}{4-3} = 3 \cdot (2+\sqrt{3}) = 6+3\sqrt{3}$

5 $\frac{6}{2\sqrt{3}-3} = \frac{6 \cdot (2\sqrt{3}+3)}{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)} = \frac{6 \cdot (2\sqrt{3}+3)}{12-9} = \frac{6 \cdot (2\sqrt{3}+3)}{3} = 2 \cdot (2\sqrt{3}+3) = 4\sqrt{3}+6$

6 $\frac{2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} \cdot (2+\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{5} \cdot (2+\sqrt{5})}{4-5} = \frac{2\sqrt{5} \cdot (2+\sqrt{5})}{-1} = -4\sqrt{5}-10$