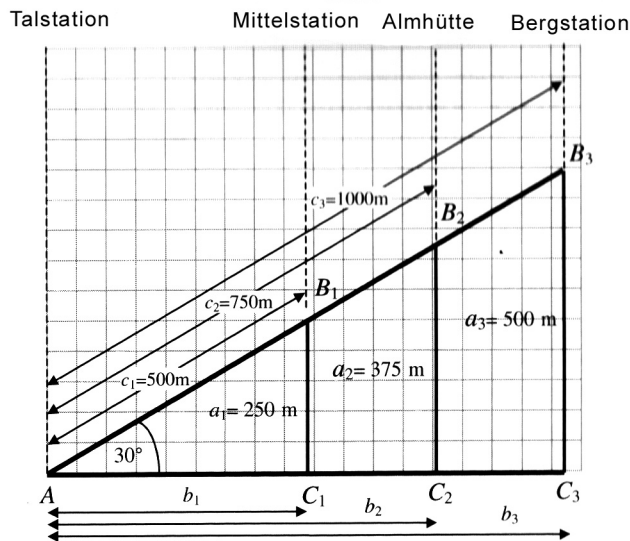


Trigonometrische Funktionen am rechtwinkligen Dreieck



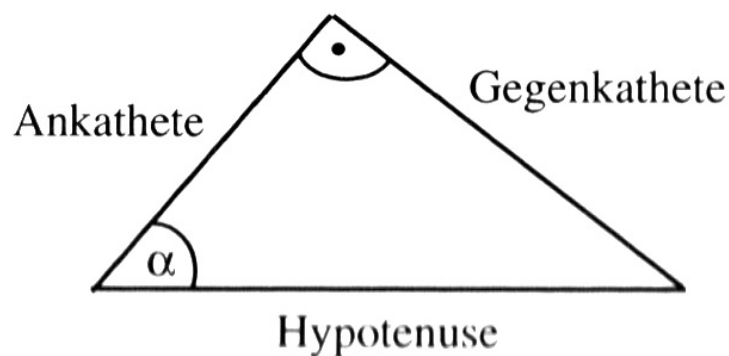
Es gilt: $\frac{a_1}{c_1} = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}$ $\frac{a_2}{c_2} = \frac{375}{750} = \frac{1}{2}$ $\frac{a_3}{c_3} = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$

Folgerungen:

1) Die Längenverhältnisse der entsprechenden Seiten in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken sind gleich.
Der Wert des Verhältnisses hängt nur vom gemeinsamen Winkel (hier 30°) ab.

2) Entsprechend stimmen auch die Quotienten $\frac{b_1}{c_1}, \frac{b_2}{c_2}, \frac{b_3}{c_3}$ bzw. $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$ überein.

Man gibt im rechtwinkligen Dreieck diesen zu einem Winkel gehörenden festen Längenverhältnissen eigene Namen.

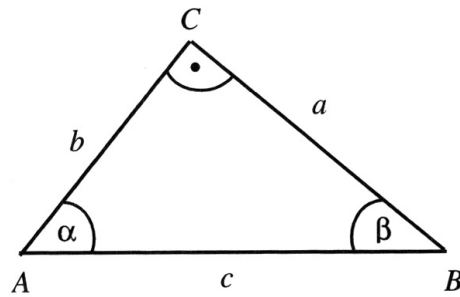


Es gilt:

$$\sin \alpha = \frac{\text{(Länge der) Gegenkathete zu } \alpha}{\text{(Länge der) Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha} = \frac{a}{b}$$

Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen



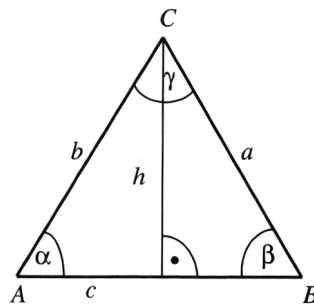
$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$$

$$\sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos \alpha$$

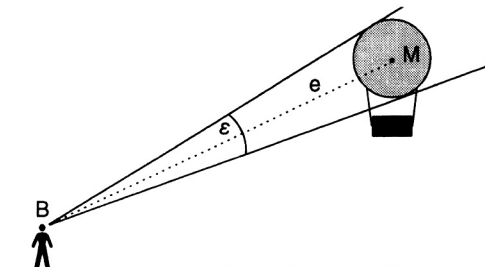
$$\cos \beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin \alpha$$

Aufgaben:

1. Berechnen Sie die fehlenden Stücke des folgenden Dreiecks ($a = b$), wenn $a = 35 \text{ m}$ und $\gamma = 50^\circ$.



2. Bestimmen Sie, wie hoch ein Drachen steht, wenn die gespannte Schnur von 50 m Länge einen Winkel von 52° mit dem Erdboden bildet.
3. Ein Ballon mit dem Durchmesser 20m wird unter einem Sehwinkel $\varepsilon = 0,4^\circ$ beobachtet (siehe untenstehende Skizze). Berechnen Sie die Entfernung e des Ballons vom Beobachter B.



4. In einem gleichschenkligen Trapez sind die Grundseiten 10 cm und 6 cm lang, die Schenkel 5 cm. Zeichnen Sie das Trapez und berechnen Sie die Maße der Innenwinkel und die Maßzahl des Flächeninhalts.

5. Begründen Sie, dass für die Höhe im gleichseitigen Dreieck gilt: $h = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$

Lösungen:

1.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 180^\circ - \gamma \Rightarrow \alpha = 65^\circ = \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{c_1}{b} \Rightarrow c_1 = \cos \alpha \cdot b = \cos 65^\circ \cdot 35 \approx 14,79 \Rightarrow c \approx 29,58$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = \sin 65^\circ \cdot 35 \approx 31,72$$

2. $\sin 52^\circ = \frac{h}{50} \Rightarrow h = \sin 52^\circ \cdot 50 \approx 39,4$

3. $\tan \frac{\varepsilon}{2} = \frac{10}{e} \Rightarrow e = \frac{10}{\tan 0,2} \approx 2864,78$

4.



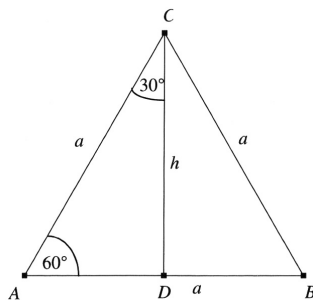
$$\cos \alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha \approx 66,42^\circ \Rightarrow \beta \approx 66,42^\circ$$

$$\gamma + \delta = 360^\circ - 2 \cdot 66,42^\circ = 227,16^\circ \Rightarrow \gamma \approx 113,58^\circ \Rightarrow \delta \approx 113,58^\circ$$

$$\sin 66,42^\circ = \frac{h}{5} \Rightarrow h = \sin 66,42^\circ \cdot 5 \approx 4,58$$

$$\text{Flächeninhalt: } A = 2 \cdot A_{\text{Dreieck}} + A_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4,6 + 6 \cdot 4,6 \approx 36,8$$

5.



$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$