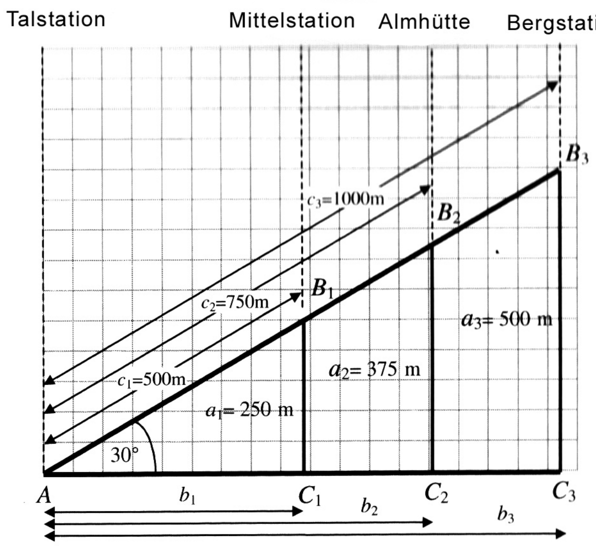
Trigonometrische Funktionen am rechtwinkligen Dreieck

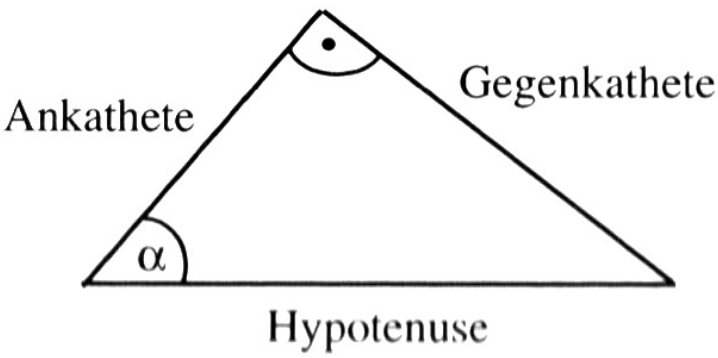


Es gilt: $\frac{a_1}{c_1} = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{a_2}{c_2} = \frac{375}{750} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{a_3}{c_3} = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$

Folgerungen:

1) Die Längenverhältnisse der entsprechenden Seiten in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken sind gleich.
Der Wert des Verhältnisses hängt nur vom gemeinsamen Winkel (hier 30°) ab.

2) Entsprechend stimmen auch die Quotienten $\frac{b_1}{c_1}, \frac{b_2}{c_2}, \frac{b_3}{c_3}$ bzw. $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$ überein.
Man gibt im rechtwinkligen Dreieck diesen zu einem Winkel gehörenden festen Längenverhältnissen eigene Namen.

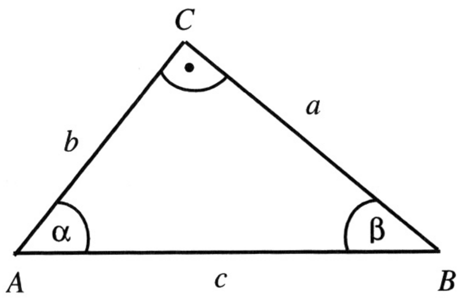


Es gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\text{(Länge der) Gegenkathete zu } \alpha}{\text{(Länge der) Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha} = \frac{a}{b}$$

Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen



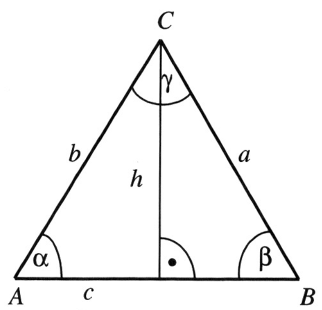
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{a}{c}:\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$$

$$\sin\beta=\sin(90°-\alpha)=\frac{b}{c}=\cos\alpha$$

$$\cos\beta=\cos(90°-\alpha)=\frac{a}{c}=\sin\alpha$$

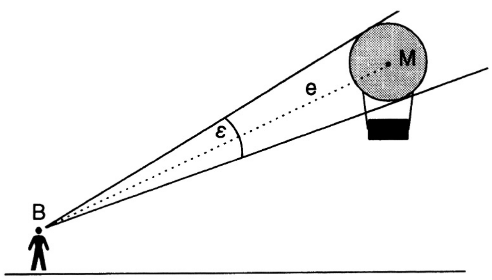
Aufgaben:

1. Berechnen Sie die fehlenden Stücke des folgenden Dreiecks (a = b), wenn a = 35 m und $\gamma=50°$.



2. Bestimmen Sie, wie hoch ein Drachen steht, wenn die gespannte Schnur von 50 m Länge einen Winkel von 52° mit dem Erdboden bildet.

3. Ein Ballon mit dem Durchmesser 20m wird unter einem Sehwinkel $\varepsilon=0{,}4°$ beobachtet (siehe untenstehende Skizze).
   Berechnen Sie die Entfernung e des Ballons vom Beobachter B.



4. In einem gleichschenkligen Trapez sind die Grundseiten 10 cm und 6 cm lang, die Schenkel 5 cm. Zeichnen Sie das Trapez und berechnen Sie die Maße der Innenwinkel und die Maßzahl des Flächeninhalts.

5. Begründen Sie, dass für die Höhe im gleichseitigen Dreieck gilt: $h=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$

Lösungen:

1.

$$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow 2\alpha=180°-\gamma \Rightarrow \alpha=65°=\beta$$

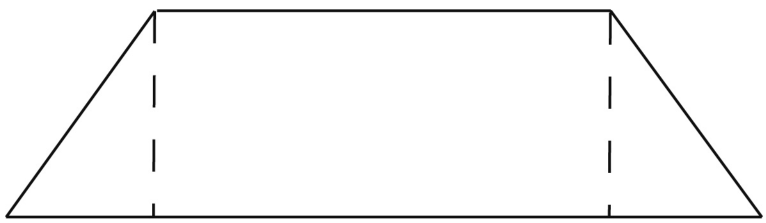
$$\cos\alpha=\frac{c_1}{b} \Rightarrow c_1=\cos\alpha\cdot b=\cos 65°\cdot 35\approx 14,79 \Rightarrow c\approx 29,58$$

$$\sin\alpha=\frac{h}{b} \Rightarrow h=\sin 65°\cdot 35\approx 31,72$$

2. $\sin 52°=\frac{h}{50} \Rightarrow h=\sin 52°\cdot 50\approx 39,4$

3. $\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{10}{e} \Rightarrow e=\frac{10}{\sin 0,2}\approx 2864,79$

4.



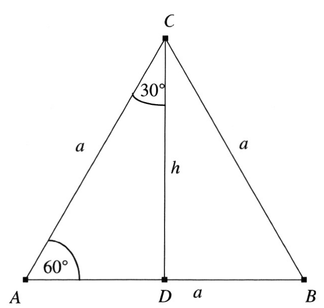
$$\cos\alpha=\frac{2}{5} \Rightarrow \alpha\approx 66,42° \Rightarrow \beta\approx 66,42°$$

$$\gamma+\delta=360°-2\cdot 66,42°=227,16° \Rightarrow \gamma\approx 113,58° \Rightarrow \delta\approx 113,58°$$

$$\sin 66,42°=\frac{h}{5} \Rightarrow h=\sin 66,42°\cdot 5\approx 4,58°$$

$$\text{Flächeninhalt: } A=2\cdot A_{\text{Dreieck}}+A_{\text{Rechteck}}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4,6+6\cdot 4,6\approx 36,8$$

5.



$$a^2=h^2+(\frac{a}{2})^2 \Rightarrow h^2=a^2-(\frac{a}{2})^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3}{4}a^2 \Rightarrow h=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$$