Vektorprodukt zweier Vektoren

Gegeben sind zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des R^3.

Gesucht ist ein Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, der sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ orthogonal ist.

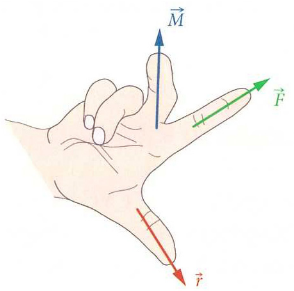
Der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ kann mit Hilfe des so genannten Vektorproduktes bestimmt werden.

Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des R^3 heißt

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ das Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Bemerkungen:

1. Das Vektorprodukt ist nur für Vektoren des R^3 definiert, nicht für Vektoren des R^2.
2. Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist wieder ein Vektor. Darin unterscheidet es sich vom Skalarprodukt.
3. $\vec{a} \times \vec{b}$ zeigt nach der Drei-Finger-Regel der rechten Hand in die Richtung des Mittelfingers, wenn $\vec{a}$ dem Daumen und $\vec{b}$ dem Zeigefinger zugeordnet ist.



Zur Berechnung des Vektorproduktes kann folgendes Schema verwendet werden:

Beispiel:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc} \cancel{2} & \cancel{7} \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 7 \\ 0 & 4 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} \end{array} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0-4 \\ 7-(-2) \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Rechengesetze für das Vektorprodukt:

Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$ und $\lambda \in R$ gilt:

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (Alternativgesetz)

(2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (Distributivgesetz)

(3) $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$ (Verträglichkeit mit S-Multiplikation)

(4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Anwendungen des Vektorproduktes:

1. Berechnung des Normalenvektors

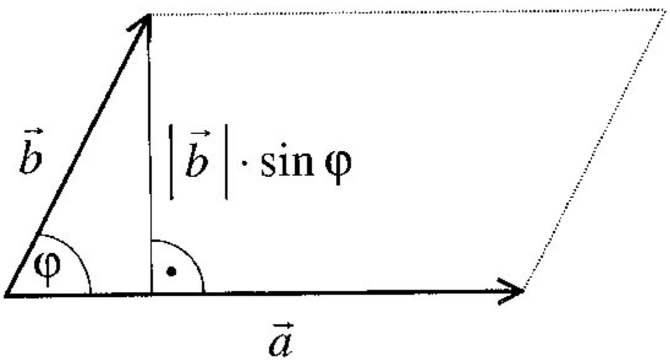
Der Vektor $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und heißt Normalenvektor.

2. Berechnung der Fläche eines Parallelogramms

Für Maßzahl des Flächeninhalts des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms gilt:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$$

wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist

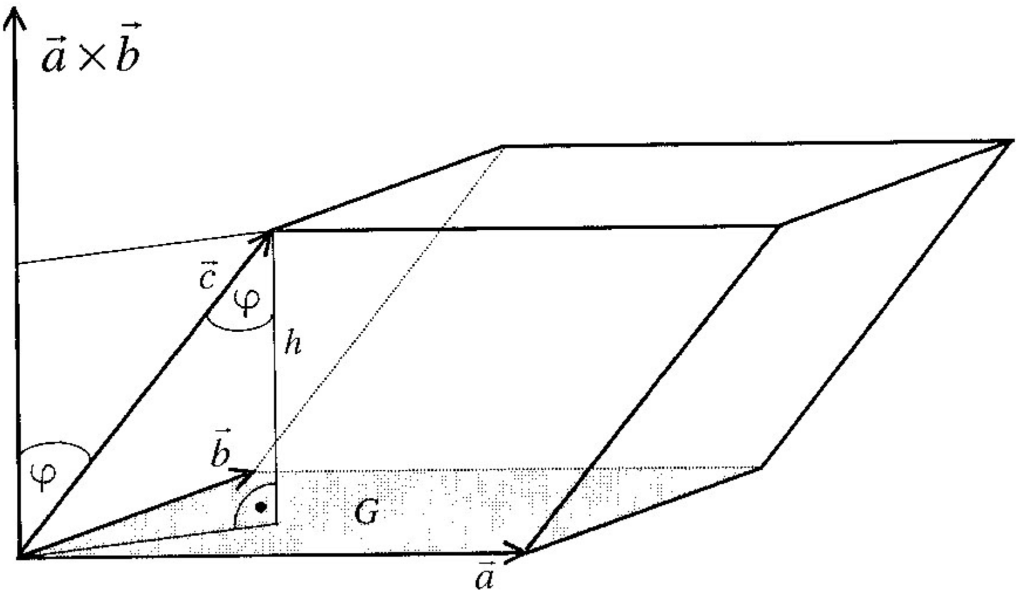


3. Volumen eines Spats

Der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ des R^3 aufgespannte Spat hat das Volumen
$V = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right|$

$V_{Spat} = G \cdot h \qquad G = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \qquad h = \left|\left|\vec{c}\right| \cdot \cos\varphi\right|$

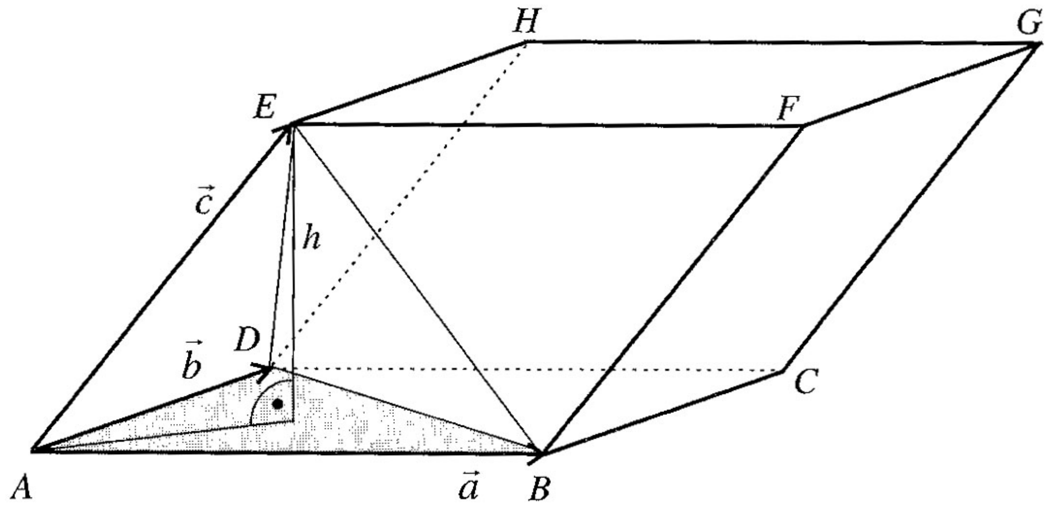
$\Rightarrow V_{Spat} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \cdot \left|\left|\vec{c}\right| \cdot \cos\varphi\right| = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|$



Folgerung: Volumen einer dreiseitigen Pyramide

Drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ des R^3 spannen eine Pyramide ABDE auf (siehe Skizze).

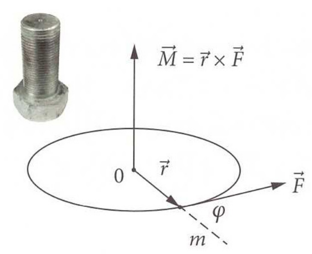
Für das Volumen dieser Pyramide gilt:



$$V = \frac{1}{3} \cdot G_{\text{Pyramide}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot G_{\text{Spat}}\right) \cdot h = \frac{1}{6} \cdot \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right|$$

4. Drehmoment:

Zieht man eine Schraube mit einem Schlüssel an, so bringt man im Abstand $\vec{r}$ zum Mittelpunkt der Rotation eine Kraft $\vec{F}$ auf.
Für das Drehmoment $\vec{M}$, das auf die Schraube wirkt, gilt dann: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.



Beispiel:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Betrag des Drehmoments beträgt also 2 Nm.