Weitere Ableitungsregeln

1) Die Produktregel:

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar, so ist auch das Produkt $f \cdot g$ an der Stelle x differenzierbar.

Herleitung der Produktregel: $u(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$u'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Es gilt also: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

2) Die Quotientenregel:

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar und ist $g(x) \neq 0$, so ist auch der Quotient $\frac{f}{g}$ an der Stelle x differenzierbar, und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x)^2)}$$

3) Die Kettenregel:

Sind f an der Stelle x und g an der Stelle f(x) differenzierbar, so ist die Verkettung $g \circ f \; (= g(f(x)))$ an der Stelle x differenzierbar, und es gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$