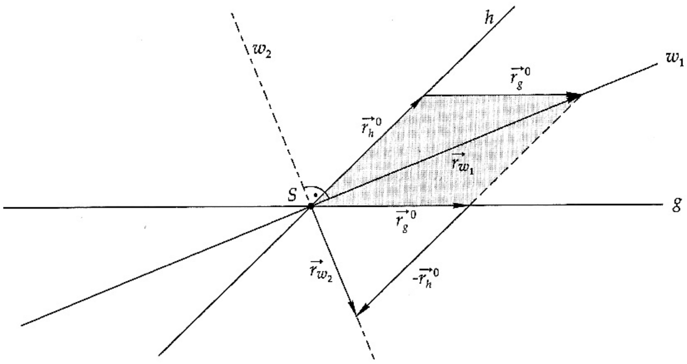
Winkelhalbierende Geraden im Raum

Zwei Geraden g und h, die sich im Punkt S schneiden, spannen eine Ebene E im Raum auf. In der folgenden Abbildung blicken wir senkrecht auf diese Ebene. Die von den Geraden g und h gebildeten Winkel werden von den Geraden w_1 und w_2 jeweils halbiert.

Diese winkelhalbierenden Geraden w_1 und w_2 liegen auch in der aufgespannten Ebene. Da es keine Normalenform für Geraden im Raum gibt, hilft die Methode über die Hessesche Normalenform wie bei der Ebene nicht weiter.
Wir müssen deshalb zur Bestimmung der winkelhalbierenden Geraden auf den aus der Mittelstufe bekannten Lehrsatz, dass die Innenwinkel in einer Raute von der Diagonalen halbiert wird, zurückgegriffen werden.
Dazu betrachten wir die Vektoren $\vec{r}_h^{\,0}$ und $\vec{r}_g^{\,0}$ als Seitenvektoren der Raute ($\vec{r}_h^{\,0}$ und $\vec{r}_g^{\,0}$ haben beide die Seitenlänge 1).
Die Diagonalen dieser Rauten sind dann die Richtungsvektoren der gesuchten winkelhalbierenden Geraden.



Für die beiden Richtungsvektoren $\overrightarrow{r_{w_1}}$ und $\overrightarrow{r_{w_2}}$ gilt dann nach obiger Figur:

$$\overrightarrow{r_{w_1}} = \overrightarrow{r_g^{\,0}} + \overrightarrow{r_h^{\,0}} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{r_{w_2}} = \overrightarrow{r_g^{\,0}} - \overrightarrow{r_h^{\,0}}$$

Die beiden Vektoren $\overrightarrow{r_g^{\,0}}$ und $\overrightarrow{r_h^{\,0}}$ sind die so genannten Richtungseinheitsvektoren (erhält man durch Division des Vektors durch seine Länge).

Die Parameterform der beiden winkelhalbierenden Geraden ergibt sich schließlich durch Anhängen des Vektors $\overrightarrow{r_{w_1}}$ (bzw. des Vektors $\overrightarrow{r_{w_2}}$) an den Schnittpunkt S:

$$w_1 : \vec{x} = \vec{s} + m \cdot (\overrightarrow{r_g^{\,0}} + \overrightarrow{r_h^{\,0}}) \quad \text{mit } m \in \mathbb{R}$$

$$w_2 : \vec{x} = \vec{s} + k \cdot (\overrightarrow{r_g^{\,0}} - \overrightarrow{r_h^{\,0}}) \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

<u>Beispiel:</u>

Bestimmen Sie die winkelhalbierenden Geraden w_1 und w_2 der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$, die sich im Punkt S(1/2/3) schneiden.

Lösung:

Richtungsvektoren $\overrightarrow{r_{w_1}}$ und $\overrightarrow{r_{w_2}}$ bestimmen:

$$\overrightarrow{r_g}^0 = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{16+49+16}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{r_h}^0 = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{r_{w_1}} = \overrightarrow{r_g}^0 + \overrightarrow{r_h}^0 = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{r_{w_2}} = \overrightarrow{r_g}^0 - \overrightarrow{r_h}^0 = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} = \frac{2}{9} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Winkelhalbierende Geraden w_1 und w_2 bestimmen:

$$\Rightarrow w_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow w_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Es gilt offensichtlich $w_1 \perp w_2$