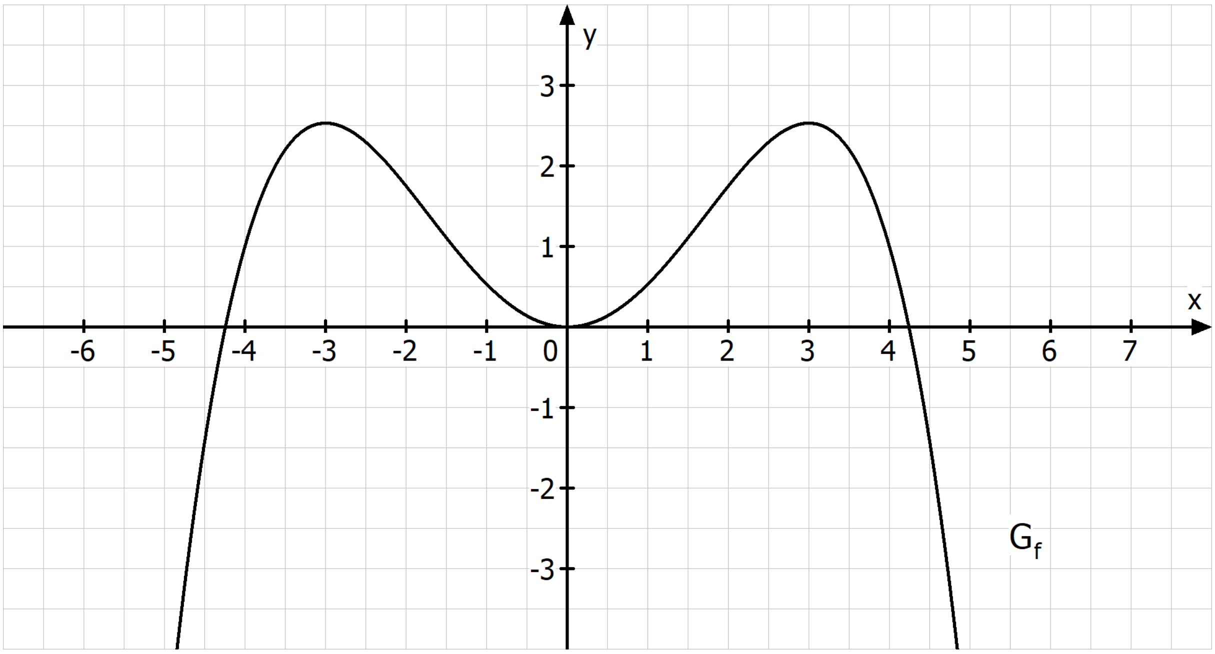
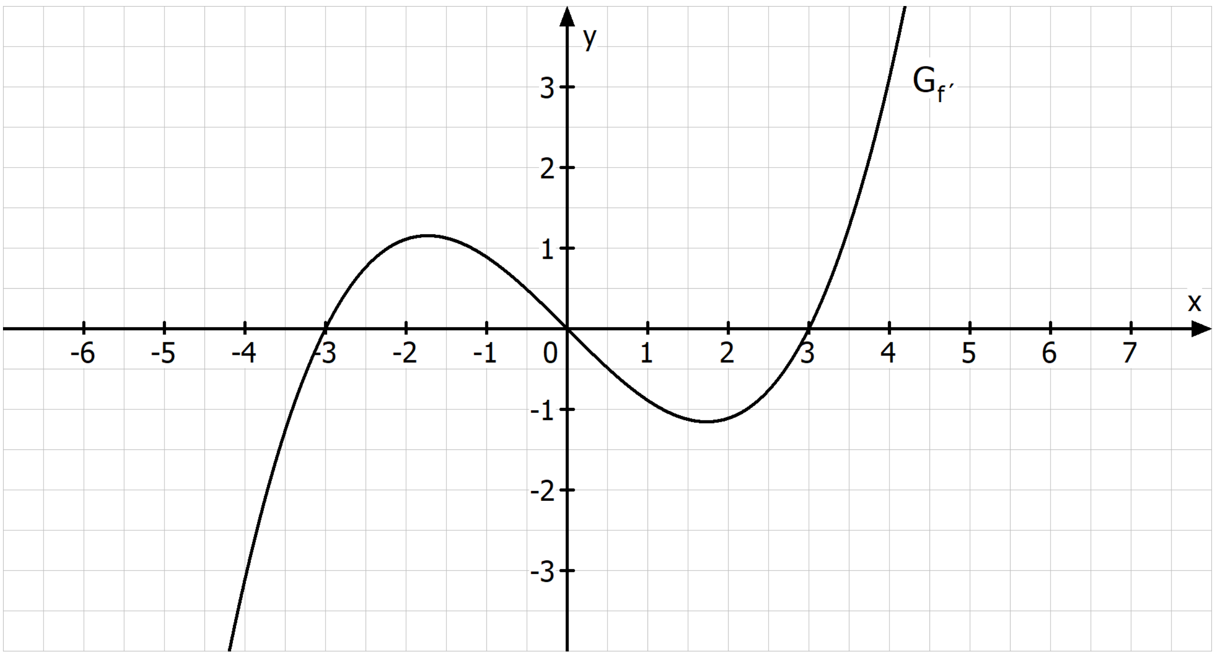
Zusammenhang zwischen den Graphen von f und f´

Beispiele:

1 Ermitteln Sie aus dem gegebenen Graphen von f möglichst genau den Graphen von f´.
Bestimmen Sie dabei die Nullstellen von f´, das Vorzeichen von f´(x) und die Extrempunkte von f´. Skizzieren Sie $G_{f'}$.





Nullstellen von f´: Extremstellen von G_f ablesen $x_1 = -3$ $x_2 = 0$ $x_3 = 3$

Vorzeichen von f´(x): Monotonieverhalten aus Zeichnung ablesen

$$G_f \text{ sms in }]-\infty;-3] \text{ sowie in } [0;3]$$
$$G_f \text{ smf in } [-3;0] \text{ sowie in } [3;\infty[$$

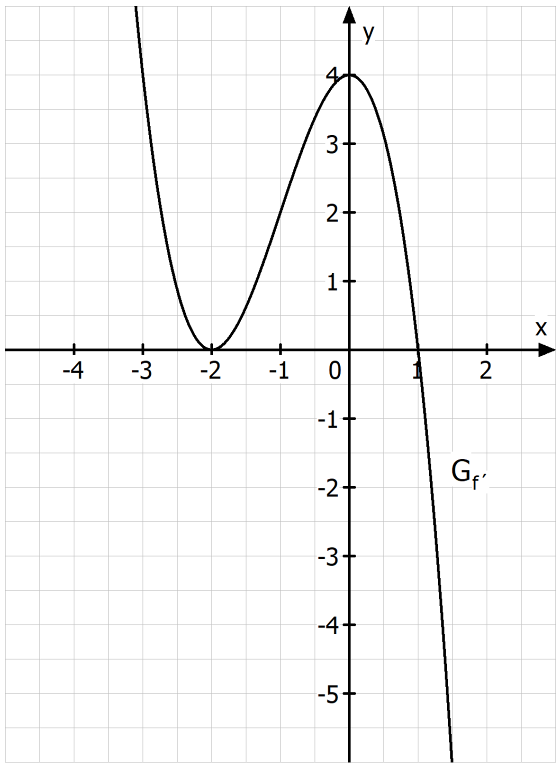
Extremstellen von f´: aus der Zeichnung die Wendestellen von G_f ablesen $x_1 = -1{,}7$ $x_2 = 1{,}7$

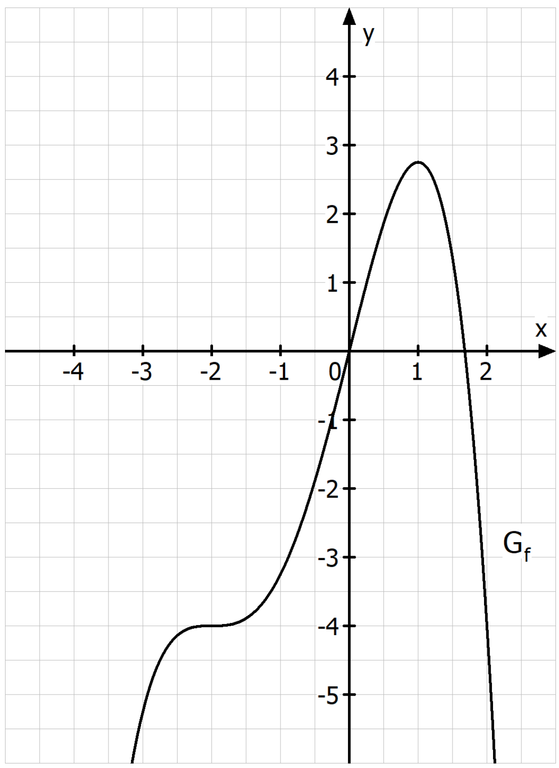
Monotonie und Extrempunkte von $G_{f'}$: aus der Zeichnung das Krümmungsverhalten von G_f ablesen

$$G_f \text{ rechtsgekrümmt in }]-\infty;-1{,}7] \text{ sowie in } [1{,}7;\infty[$$
$$G_f \text{ linksgekrümmt in } [-1{,}7;1{,}7]$$
$$\Rightarrow G_{f'} \text{ smf in }]-\infty;-1{,}7] \text{ sowie in } [1{,}7;\infty[$$
$$G_{f'} \text{ sms in } [-1{,}7;1{,}7]$$
$$\Rightarrow x = -1{,}7 \text{ lokales Minimum von } G_{f'}$$
$$x = 1{,}7 \text{ lokales Maximum von } G_{f'}$$

Mit dem Lineal skizzieren wir die Wendetangenten bei x = -1,7 und x = 1,7 und lesen die Steigung ungefähr ab $\Rightarrow \text{TIP}(-1{,}7 / 1{,}2)$ $\text{HOP}(1{,}7 / -1{,}2)$

2 Ermitteln Sie aus dem gegebenen Graphen von f´ möglichst genau den Graphen von f.
Bestimmen Sie dabei das Monotonieverhalten, die Extremstellen und deren Art, das Krümmungsverhalten sowie die Wendestellen des Graphen von f.
Skizzieren Sie G_f, wenn f(0) = 0 gilt.





Monotonieverhalten und Extremstellen von G_f:

Aus der Zeichnung lesen wir die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ des Graphen von f´ ab.
An diesen Stellen hat G_f eine waagrechte Tangente.
Der Graph von f´ verläuft für $x < 1$ oberhalb der x-Achse, also steigt der Graph von f in diesem Bereich.
Für $x > 1$ verläuft der Graph von f´ unterhalb der x-Achse, also fällt der Graph von f in diesem Bereich.
Also liegt bei $x = 1$ ein Hochpunkt vor.

Krümmungsverhalten und Wendestellen von G_f:

Aus der Zeichnung lesen wir das Steigungsverhalten des Graphen von f´ ab.
Der Graph von f´ fällt bis $x_1 = -2$ und steigt dann bis $x_2 = 0$ und fällt ab dann wieder.
Also ist $f''(x) < 0$ für $x < -2$ und $x > 0$ und $f''(x) > 0$ für $-2 < x < 0$.

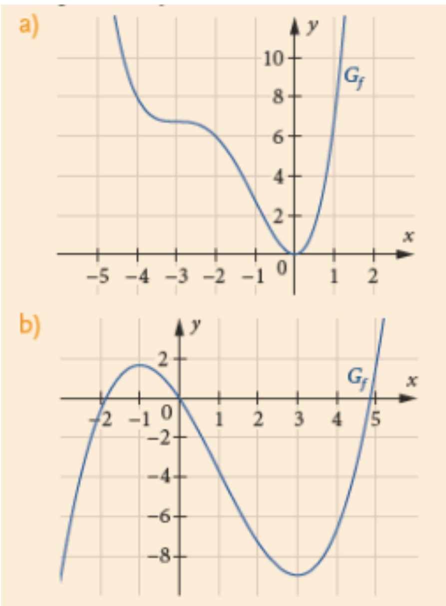
G_f rechtsgekrümmt in $]-\infty,-2]$ sowie in $[0;\infty[$

G_f linksgekrümmt in $[-2;0]$

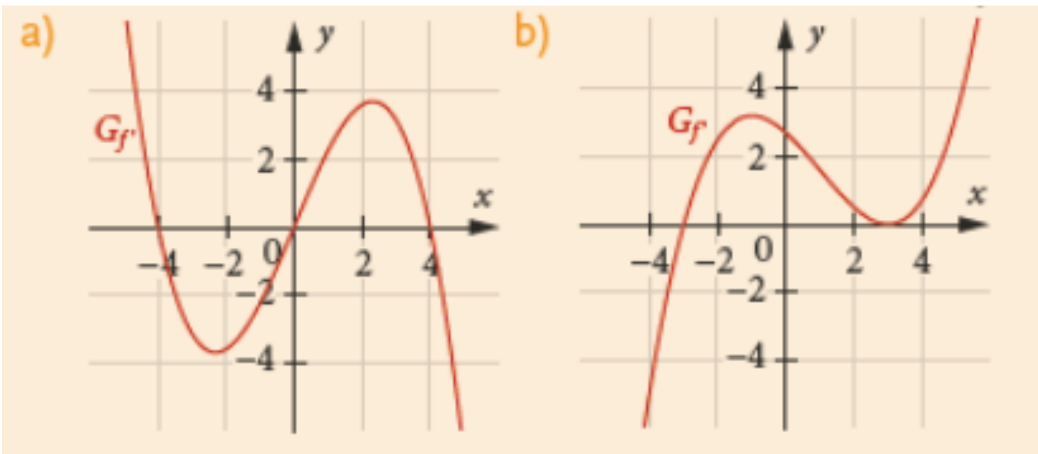
$x = -2$ und $x = 0$ Wendepunkte von G_f

Aufgaben:

1 Gegeben ist der Graph einer ganzrationalen Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie für die Ableitung f´die Nullstellen und das Vorzeichen von f´(x) sowie für den Graphen von f´ möglichst genau das Monotonieverhalten und die Art und die Koordinaten der Extrempunkte. Skizzieren Sie den Graphen von f´ (ohne Hilfsmittel).



2 Gegeben ist der Graph $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f´ der ganzrationalen Funktion f mit f(0) = 0 und Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie anhand von $G_{f'}$ das Monotonieverhalten des Graphen G_f, die Extremstellen und deren Art, das Krümmungsverhalten sowie die Wendestellen.
Skizzieren Sie G_f (ohne Hilfsmittel).



3.0 Entscheiden Sie begründet, welche der folgenden Aussagen über eine ganzrationale Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ wahr sind.

3.1 Ist x_0 eine einfache Nullstelle von f, so gilt $f'(x_0) \neq 0$.

3.2 Jede doppelte Nullstelle von f ist eine einfache Nullstelle von f´.

3.3 Jede einfache Nullstelle von f´ ist eine doppelte Nullstelle von f.

Lösungen:

1a)

Nullstellen von f´: $x_1 = -3 \quad x_2 = 0$

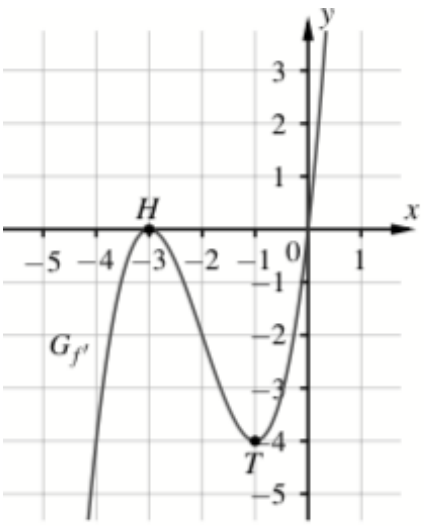
$f'(x) < 0$ für $x \in]-\infty;-3[$ und für $x \in]-3;0[$

$f'(x) > 0$ für $x \in]0;\infty[$

$G_{f'}$ hat bei $x_1 = -3$ und bei $x_2 = 0$ Extrempunkte und zwar nach dem Vorzeichen von $f'(x)$ bei $x_1 = -3$ einen Hochpunkt HOP(-3/0) und einen Tiefpunkt TIP(-1/-4), wenn man bei x = -1 an G_f die Steigung - 4 abliest.

$G_{f'}$ sms in $]-\infty;-3]$ sowie in $[-1;\infty[$

$G_{f'}$ smf in $[-3;-1]$



1b)

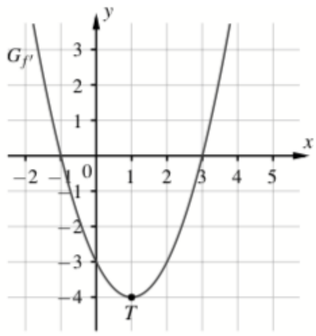
Nullstellen von f´: $x_1 = -1 \quad x_2 = 3$

$f'(x) > 0$ für $x \in]-\infty;-1[$ und für $x \in]3;\infty[$

$f'(x) < 0$ für $x \in]-1;3[$

$G_{f'}$ hat bei $x = 1$ einen Extrempunkt und zwar nach dem Vorzeichen von $f'(x)$ einen Tiefpunkt TIP(1/-4), wenn man bei x = -1 an G_f die Steigung - 4 abliest.

$G_{f'}$ smf in $]-\infty;1]$ und sms in $[1;\infty[$



2a)

Nullstellen von f´: $x_1 = -4 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 4$

$f'(x) > 0$ für $x \in \left]-\infty;-4\right[$ sowie für $x \in \left]0;4\right[$

$f'(x) < 0$ für $x \in \left]-4;0\right[$ sowie für $x \in \left]4;+\infty\right[$

G_f sms in $\left]-\infty;-4\right]$ sowie in $[0;4]$

G_f smf in $[-4;0]$ sowie in $\left[4;\infty\right[$

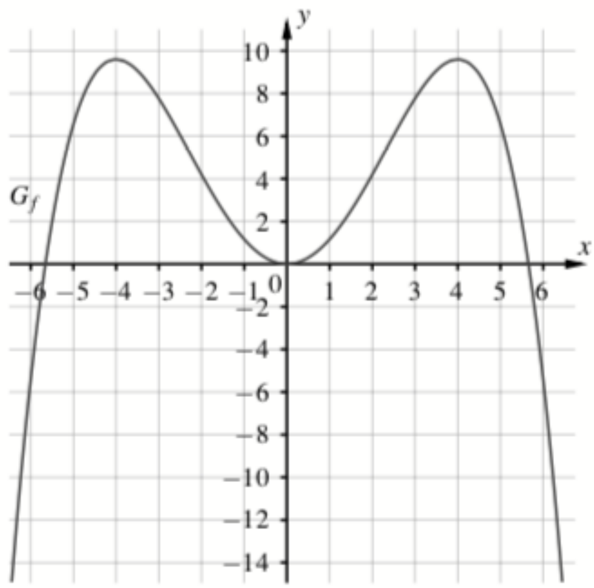
$\Rightarrow G_f$ hat einen Hochpunkt bei x = -4 und x = 4
und einen Tiefpunkt bei x = 0

$G_{f'}$ smf in etwa $\left]-\infty;-2{,}4\right]$ sowie in $\left[2{,}4;\infty\right[$

$G_{f'}$ sms in $[-2{,}4;2{,}4]$

$\Rightarrow G_f$ ist rechtsgekrümmt in $\left]-\infty;-2{,}4\right]$ sowie in $\left[2{,}4;\infty\right[$
G_f ist linksgekrümmt in $[-2{,}4;2{,}4]$

$\Rightarrow G_f$ hat bei $x_1 = -2{,}4$ und bei $x = 2{,}4$ Wendepunkte



2b)

Nullstellen von f´: $x_1 = -3 \quad x_{2/3} = 3$

$f´(x) < 0$ für $x \in \left]-\infty;-3\right[$

$f´(x) > 0$ für $x \in \left]-3;3\right[$ sowie für $x \in \left]3;+\infty\right[$

G_f smf in $\left]-\infty;-3\right]$

G_f sms in $\left[-3;\infty\right[$

$\Rightarrow G_f$ hat einen Tiefpunkt bei x = -3 und einen Terrassenpunkt bei x = 3

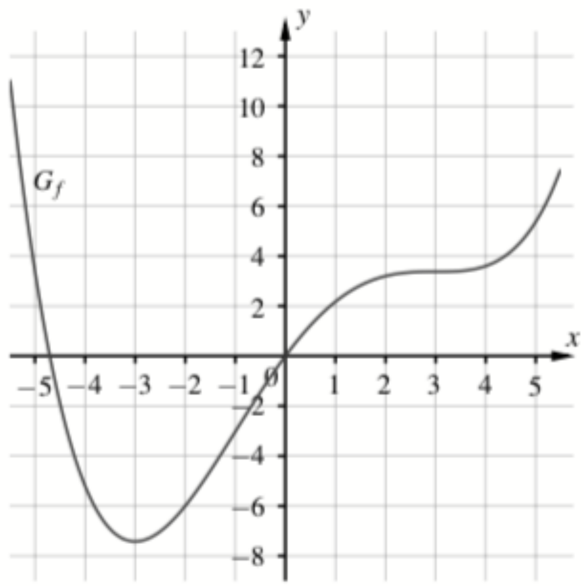
$G_{f´}$ sms in etwa $\left]-\infty;-1\right]$ sowie in $\left[3;\infty\right[$

$G_{f´}$ smf in $\left[-1;3\right]$

$\Rightarrow G_f$ ist linksgekrümmt in $\left]-\infty;-1\right]$ sowie in $\left[3;\infty\right[$

G_f ist rechtsgekrümmt in $\left[-1;3\right]$

$\Rightarrow G_f$ hat bei $x_1 = -1$ und bei x = 3 Wendepunkte



3.1

Aussage ist richtig.

Beispiel: $f(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$

$f´(x) = 2x \quad f´(1) \neq 0 \quad f´(-1) \neq 0$

3.2

Aussage ist richtig.

G_f hat bei x_0 einen Extrempunkt auf der x-Achse,

deshalb wechselt $f´(x)$ bei x_0 das Vorzeichen.

3.3

Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel: $f(x) = x^2 + 1 \quad f´(x) = 2x \quad 2x = 0 \Rightarrow x = 0$