

### Extremwertaufgaben

- 1 Aus einem Draht der Länge  $l = 72 \text{ cm}$  soll ein Kantenmodell eines Quaders hergestellt werden, der eine quadratische Grundfläche und ein möglichst großes Volumen haben soll.

Bestimmen Sie die Länge der Kanten des Quaders. 

- 2 Aus einem rechteckigen Kartonblatt mit den Seiten 32 cm und 20 cm sollen an den Ecken kongruente Quadrate herausgeschnitten werden.

Durch Aufklappen der entstehenden Rechtecke soll eine oben offene Schachtel mit maximalem Volumen entstehen.

Berechnen Sie die Seite der herausgeschnittenen Quadrate und den

Maximalwert des Volumens. 

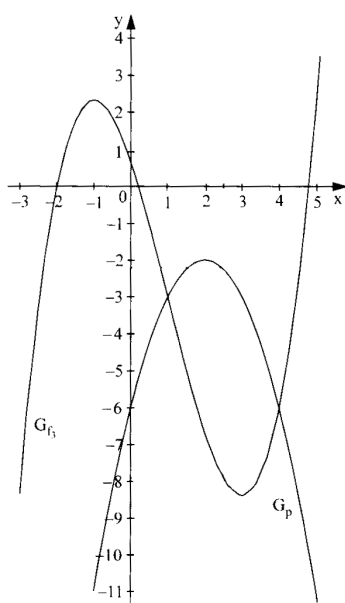
3.0 Die Gerade mit der Gleichung  $x = k$ ,  $1 < k < 4$  schneidet den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3} \text{ im Punkt C und die Parabel } p(x) = -x^2 + 4x - 6 \text{ im}$$

Punkt D. Die Parallelen zur x-Achse durch die Punkte C und D schneiden die y-Achse in den Punkten F und E. Die Punkte C, D, E und F bestimmen das Rechteck CDEF.

3.1 Zeichnen Sie das Rechteck CDEF für den Sonderfall  $k = 2,5$  in die untenstehende Zeichnung ein und zeigen Sie, dass sich die von k abhängige Maßzahl des Umfangs

$U(k)$  in der Form  $U(k) = -\frac{2}{3}(k^3 - 24k + 20)$  darstellen lässt.



3.2 Bestimmen Sie, für welchen Wert von  $k \in ]1;4[$  der Umfang des zugehörigen

Rechtecks CDEF den absolut größten Wert annimmt. (Abitur 1997 A II) ○

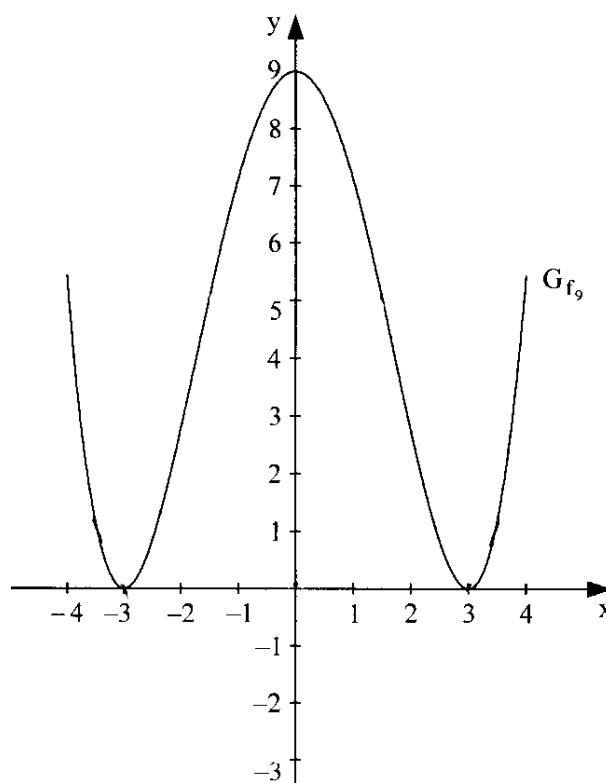
4.0 Die Geraden mit den Gleichungen  $x = u$  und  $x = -u$ ,  $0 < u < 3$  schneiden den Graphen

der Funktion  $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - 2x^2 + 9$  in den Punkten P und Q. Zusammen mit dem

Koordinatenursprung O bilden die Punkte P und Q das Dreieck OPQ.

4.1 Zeichnen Sie für den Fall  $u = 1,5$  das Dreieck OPQ in untenstehende Zeichnung ein und zeigen Sie, dass für die von  $u$  abhängige Flächenmaßzahl  $A(u)$  des Dreiecks OPQ gilt:

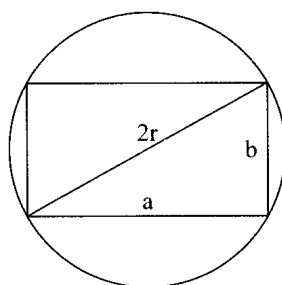
$$A(u) = \frac{1}{9}(u^5 - 18u^3 + 81u) \quad \text{☐}$$



4.2 Bestimmen Sie  $u \in ]0;3[$  so, dass der Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks OPQ den absolut größten Wert besitzt. Runden Sie dabei auf zwei Stellen nach dem Komma.

(Abitur 1998 A II) ○

- 5 Die Zahl  $\sqrt{10}$  ist so in zwei positive Summanden zu zerlegen, dass die Summe der Quadrate dieser Summanden einen absoluten Extremwert annimmt.  
Berechnen Sie die beiden Summanden und entscheiden Sie, welche Art von absolutem Extremum vorliegt. (Abitur 1999 A I) 
- 6 Aus einer kreisförmigen Rasenfläche mit dem Radius  $r = 5$  LE soll für ein Blumenbeet eine rechteckige Fläche mit den Seiten  $a$  und  $b$  so ausgestochen werden, dass dieses Rechteck dem Kreis einbeschrieben ist (siehe Skizze).



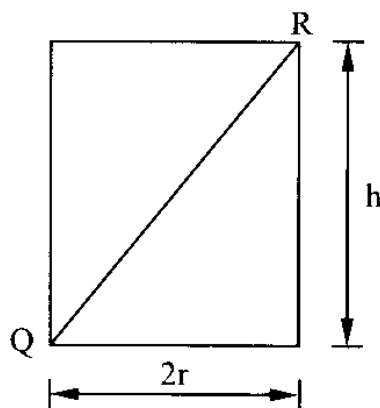
Die von  $a$  abhängige Maßzahl des Flächeninhalts des Rechtecks wird mit  $A(a)$  bezeichnet. Berechnen Sie, wie lang die Seite  $a$  sein muss, damit die Größe  $g(a) = (A(a))^2$  (und damit auch  $A(a)$ ) den absolut größten Wert annimmt und ermitteln Sie auch die absolut größte Flächenmaßzahl. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch. 

(Teilergebnis:  $g(a) = 100a^2 - a^4$ ) (Abitur 1999 A II)

- 7.0 Ein Kino hat bei einem Eintrittspreis von 10,00 DM durchschnittlich 200 Besucher.  
Man schätzt, dass bei einer Erhöhung des Eintrittspreises um 1,00 DM die ursprüngliche Besucherzahl um durchschnittlich 10 abnehmen wird, bei einer Erhöhung um 2,00 DM um 20, bei einer Erhöhung um 3,00 DM um 30 usw. (Zur Vereinfachung werden für die Berechnungen sämtliche Einheiten weggelassen.)
- 7.1 Die zu erwartenden Einnahmen in Abhängigkeit von der Preiserhöhung  $x$  lassen sich mithilfe einer differenzierbaren Funktion  $E$  beschreiben.  
Ermitteln Sie den Funktionsterm  $E(x)$ . Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge  $D_E$  an, wenn man als Grundmenge  $R$  wählt. 
- (Teilergebnis:  $E(x) = 2000 + 100x - 10x^2$ )

7.2 Berechnen Sie den Eintrittspreis so, dass die Einnahmen den absolut größten Wert annehmen. (Abitur 2001 A II) ☐

8.0 Bei zylinderförmigen Behältern mit Höhe  $h$  und Radius  $r$  (Seitenansicht siehe nebenstehende Skizze) ist  $\overline{QR} = 12 \text{ dm}$  konstant. (Einheiten bleiben unberücksichtigt.)



8.1 Stellen Sie die Maßzahl des Volumens  $V(h)$  des Behälters in Abhängigkeit von der Höhe  $h$  dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge  $D_V$  der zugehörigen Funktion  $V$  an. ☐

(Mögliches Teilergebnis:  $V(h) = \pi \cdot \left(-\frac{h^3}{4} + 36h\right)$ )

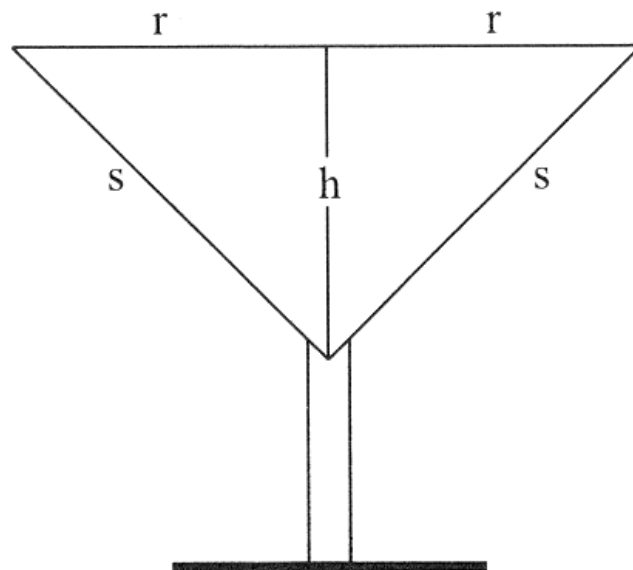
8.2 Bestimmen Sie  $h$  ( $h \in D_V$ ) so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt.

Bestimmen Sie für diesen Fall auch den Radius  $r$  des Behälters sowie das maximale Volumen  $V_{\max}$ . (Abitur 2002 A II) ☐

- 9 Der Kelch eines Eisbechers soll die Form eines auf der Spitze stehenden geraden Kreiskegels erhalten (siehe Skizze des Achsenschnittes; die Dicke der Glaswand werde vernachlässigt). Die Längenmaßzahl der Mantellinie  $s$  des Kegels beträgt 12. Stellen Sie die Volumenmaßzahl  $V(h)$  des Kegels in Abhängigkeit von der Kegelhöhe  $h$  dar und geben Sie die Definitionsmenge  $D_V$  der Funktion  $V:h \rightarrow V(h)$  an.

Weisen Sie nach, dass die Volumenmaßzahl  $V(h)$  für  $h_1 = 4\sqrt{3}$  ihren absoluten größten Wert annimmt. Zeigen Sie außerdem, dass in diesem Fall die Längenmaßzahlen von Radius  $r_1$  und Höhe  $h_1$  des Kegels im Verhältnis  $\sqrt{2}:1$  stehen (Abitur 2000 AI). 

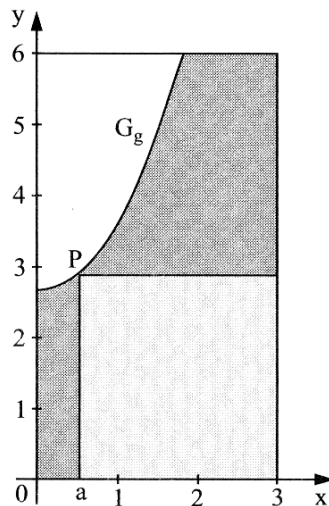
(Mögliches Teilergebnis:  $V(h) = \pi \left( -\frac{h^3}{3} + 48h \right)$ )



10.0 Die dunkel gefärbte Fläche in der untenstehenden Skizze stellt den Rest einer längs eines Parabelstücks  $G_g$  zersprungenen ehemals rechteckigen Glasplatte dar. Der zu

diesem Parabelstück gehörende Funktionsterm lautet:  $g(x) = x^2 + \frac{8}{3}$  mit  $D_g = \left[0; \sqrt{\frac{10}{3}}\right]$ .

Aus dem Rest der Glasplatte soll eine achsenparallele Scheibe (hellgrau) so geschnitten werden, dass der Punkt  $P(a; g(a))$  auf  $G_g$  liegt. (Abitur 2003 AI)

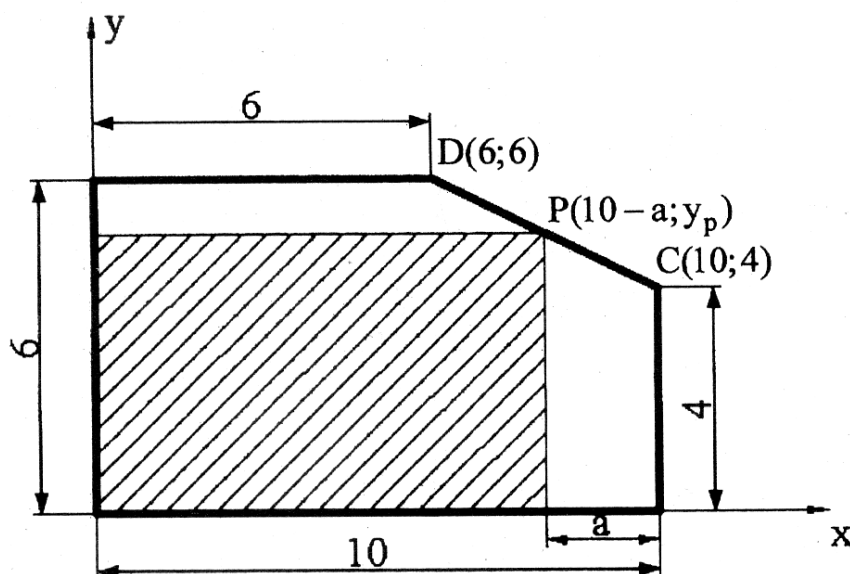


10.1 Stellen Sie die Maßzahl  $A(a)$  der „neuen“ Rechtecksfläche in Abhängigkeit von der Abszisse  $a$  des Punktes  $P$  dar. Geben Sie auch eine sinnvolle Definitionsmenge  $D_A$  an. (Lage von  $P$  siehe Skizze!) ☒

(Mögliches Teilergebnis:  $A(a) = -a^3 + 3a^2 - \frac{8}{3}a + 8$ )

10.2 Bestimmen Sie nun denjenigen Wert von  $a$ , für den der Flächeninhalt den größten Wert  $A_{\max}$  annimmt. Berechnen Sie auch  $A_{\max}$ . ☐

- 11.0 Aus einem fünfeckigen Brett soll ein rechteckiges Stück herausgesägt werden (siehe Skizze unten). Dabei soll der Punkt P auf der Strecke [CD] liegen. (Abitur 2004 AI)



- 11.1 Stellen Sie die Flächenmaßzahl  $A(a)$  des Rechtecks in Abhängigkeit von der Streckenlänge  $a$  dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge  $D_A$  der Funktion  $A$  an. ☒

(Mögliches Teilergebnis:  $A(a) = -\frac{1}{2}(a^2 - 2a - 80)$  )

- 11.2 Berechnen Sie nun denjenigen Wert von  $a$ , für den die Rechtecksfläche den größten Wert annimmt. Berechnen Sie auch, wie groß in diesem Fall der „Abfall“ in Prozent bezogen auf die Fläche des Fünfecks ist. ☐

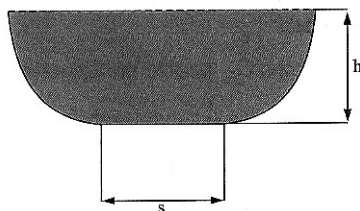
- 12.0 Eine Fachoberschule beschließt ein Denkmal zu errichten. Es soll die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche haben. Es soll gelten, dass die Summe aus dem Umfang der Grundfläche und der Pyramidenhöhe 28 dm ergibt. (Abitur 2003 AII)

- 12.1 Bestimmen Sie das Volumen  $V(s)$  der Pyramide in Abhängigkeit von der Länge  $s$  einer Quadratseite und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge  $D_V$  an. ☒

(Teilergebnis:  $V(s) = -\frac{4}{3}(s^3 - 7s^2)$  )

- 12.2 Berechnen Sie  $s$  so, dass das Pyramidenvolumen maximal wird. Geben Sie auch diesen maximalen Wert  $V_{\max}$  an. ☐

- 13.0 Der Querschnitt des abgebildeten, oben offenen Kanals ist begrenzt durch zwei Viertelkreisbögen und durch eine Strecke der Länge  $s \geq 0$ . Die Höhe des Kanals ist  $h$ . (Abitur 2005 AI)



- 13.1 Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche  $A(h)$  in Abhängigkeit von der Höhe  $h$ , wenn der „Umfang“ (2 Viertelkreisbögen und Strecke  $s$ ) 5 LE beträgt. Ermitteln Sie die größtmögliche geometrisch sinnvolle Definitionsmenge der Funktion  $A(h)$ . ☒

(Mögliches Teilergebnis:  $A(h) = 5h - \frac{1}{2}h^2\pi$ )

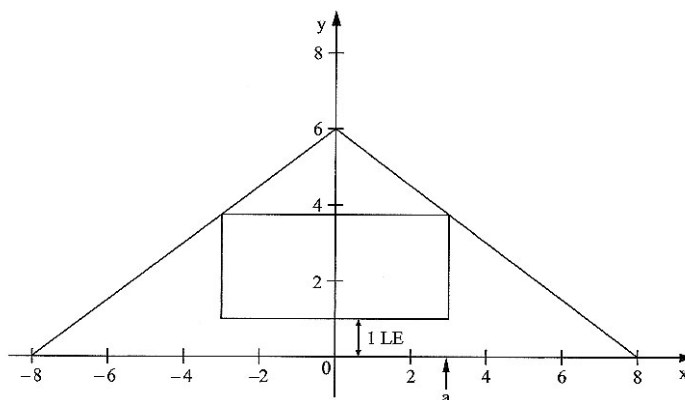
- 13.2 Bestimmen Sie  $h$  so, dass die Querschnittsfläche  $A$  den größten Wert besitzt. Berechnen Sie diesen Wert. Beschreiben Sie für diesen Fall die Form der Querschnittsfläche  $A$ . ☐

- 14.0 Gegenüber einem Würfel der Kantenlänge  $x$  sind die Kanten der Bodenfläche eines Quaders um 3 LE größer, seine Höhe um 3 LE geringer. (Abitur 2006 AI)

- 14.1 Bestimmen Sie das Volumen  $V(x)$  des Quaders in Abhängigkeit von  $x$  und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge  $D_V$  an. ☐  
(Mögliches Teilergebnis:  $V(x) = (x^2 - 9)(x + 3)$ )

- 14.2 Berechnen Sie die Kantenlänge  $x$  des Würfels so, dass Quader und Würfel gleiches Volumen haben. ☐

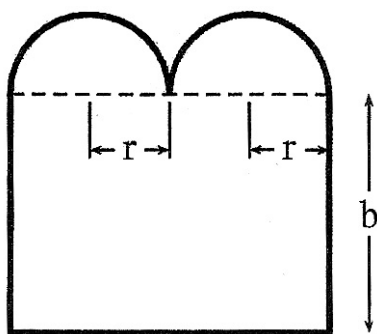
- 15.0 In einem dreieckigen Dachgiebel soll symmetrisch zur Mittelachse (y-Achse) ein rechteckiges Fenster eingebaut werden. Das Fenster soll auf einem Sims der Höhe 1 LE aufsitzen und mit den oberen Ecken an den Dachgiebel heranreichen (siehe Skizze): (Abitur 2007 All)



- 15.1 Stellen Sie den Flächeninhalt  $A(a)$  des Fensters in Abhängigkeit von  $a$  (siehe Skizze) dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge der Funktion  $A$  an. ☒ (Mögliches Teilergebnis:  $A(a) = 10a - 1,5a^2$ )

- 15.2 Bestimmen Sie nun  $a$  so, dass der Flächeninhalt des Fensters den größten Wert annimmt. Ermitteln Sie auch Breite und Höhe dieses Fensters. ☐

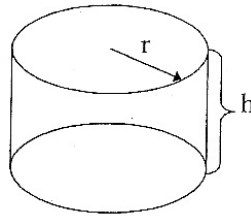
- 16.0 Ein Doppelrundbogenfenster (siehe Zeichnung) wird von drei Seiten eines Rechtecks sowie von zwei Halbkreisen (jeweils Radius  $r$ ) begrenzt. Der Umfang des Fensters beträgt 10 m. (Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet !) (Abitur 2008 All)



- 16.1 Stellen Sie den Flächeninhalt  $A(r)$  des Fensters in Abhängigkeit vom Radius  $r$  der Halbkreise dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge  $D_A$  an. ☒ (Teilergebnis:  $A(r) = 20r - (3\pi + 8) \cdot r^2$ )

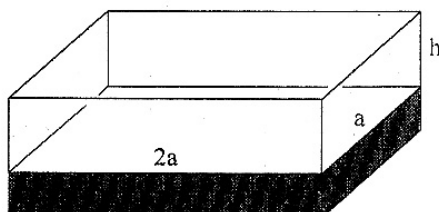
- 16.2 Berechnen Sie auf drei Nachkommastellen genau denjenigen Wert von  $r$ , für den der Flächeninhalt des Fensters seinen größten Wert annimmt. Wie viel Prozent des Inhalts nimmt in diesem Fall der rechteckige Teil des Fensters ein ? ☐

- 17.0 Eine zylinderförmige Trommel (siehe Skizze) besitzt die Gesamtoberfläche  $2400 \cdot \pi \text{ cm}^2$ . Der Klang der Trommel hängt auch von der Oberfläche und dem Volumen ab. Die Boden- und Deckfläche der Trommel sind mit Fell bespannt. Durch die erhältlichen Fellgröße ergibt sich, dass ein Radius von 12 cm bis 30 cm möglich ist. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch. (Abitur 2009 AI)



- 17.1 Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen  $V(r)$  der Trommel in Abhängigkeit von  $r$  auf. ☒  
(Ergebnis:  $V(r) = \pi \cdot (1200r - r^3)$ )
- 17.2 Berechnen Sie  $r$  so, dass das Volumen der Trommel den größten Wert (und damit die Trommel den tiefsten Ton) annimmt. ☐
- 18.0 Die Gebührenordnung des Paketdienstes „Paket Ahoi“ enthält folgende Klausel: „Bei Päckchen in Zylinderform darf die Summe aus der Höhe  $h$  des Zylinders und dem Durchmesser  $d$  des Grundkreises 100 cm nicht überschreiten.“ Auf Einheiten wird im Folgenden verzichtet. (Abitur 2009 AII)
- 18.1 Berechnen Sie das Volumen  $V(d)$  eines solchen Päckchens, wenn die in der Gebührenordnung erwähnte Summe genau 100 cm beträgt. Geben Sie auch eine geeignete Definitionsmenge an. ☒  
(Mögliches Teilergebnis:  $V(d) = \pi \cdot (25d^2 - \frac{1}{4}d^3)$ )
- 18.2 Bestimmen Sie nun die Maße desjenigen zylinderförmigen Päckchens, das dabei maximales Volumen aufweist. ☐

- 19.0 Ein Schildkrötenbesitzer baut für seine Landschildkröte ein Terrarium mit einem quaderförmigen lichtdurchlässigen Dach der Länge  $2a$ , der Breite  $a$  und der Höhe  $h$ . Dieses wird auf ein geeignetes Fundament gesetzt. Die lichtdurchlässige Oberfläche soll  $4 \text{ m}^2$  betragen. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch. (Abitur 2010 AI)



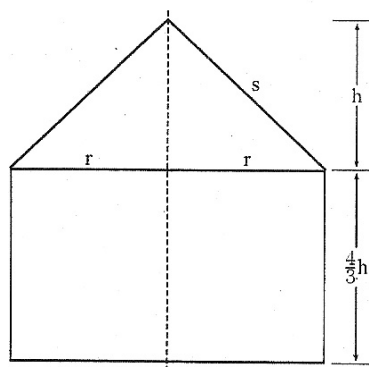
- 19.1 Bestimmen Sie das Volumen  $V(a)$  des Daches in Abhängigkeit von  $a$ . ☒

(Mögliches Ergebnis:  $V(a) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$ )

- 19.2 Bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge  $D_V$  der Funktion  $V$  für den in 19.1 gegebenen Sachzusammenhang. ☐

- 19.3 Ermitteln Sie  $a$  so, dass das Volumen des Daches den größten Wert annimmt. Berechnen Sie hierfür auch die zugehörige Höhe  $h$ . ☐

- 20.0 Eine Biogasanlage besteht aus einem zylinderförmigen, oben offenen Grundkörper, das Dach der Höhe  $h$  ist kegelförmig (siehe untenstehende Skizze des Querschnitts). Die Mantellänge  $s$  des Kegels beträgt  $15 \text{ m}$ . Die folgenden Rechnungen werden ohne Einheiten durchgeführt. (Abitur 2010 AII)



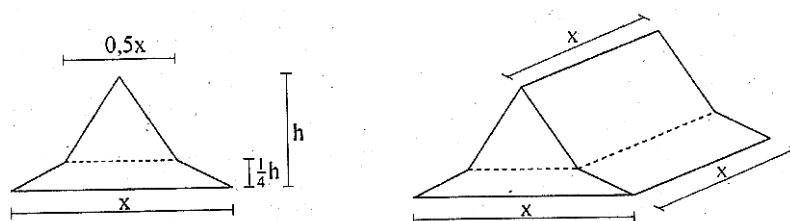
- 20.1 Stellen Sie die Maßzahl  $V$  des Volumens der gesamten Biogasanlage in Abhängigkeit von der Höhe  $h$  dar und geben Sie eine im gegebenen Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge der Funktion  $V(h)$  an. ☒

(Mögliches Teilergebnis:  $V(h) = (375h - \frac{5}{3}h^3) \cdot \pi$ )

- 20.2 Berechnen Sie  $h$  so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Runden Sie dabei nicht. Bestimmen Sie auf den nächsten ganzzahligen Wert gerundet den Wert  $V_{\max}$  des maximalen Volumens. ☐

21.0 Eine Schokoladenfirma will eine neue Praline auf den Markt bringen. Die Länge und die Breite der Praline beträgt jeweils  $x$  cm. Die weiteren Größenverhältnisse sind den folgenden Abbildungen zu entnehmen.

Aus verpackungstechnischen Gründen gilt für die Summe aus Höhe  $h$ , Breite und Länge 8 cm. Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch. (Abitur 2011 AI)

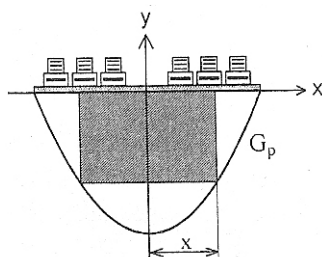


21.1 Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen  $V(x)$  der Praline in Abhängigkeit von  $x$  auf und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge an. ☒

(Teilergebnis:  $V(x) = -0,75x^3 + 3x^2$ )

21.2 Berechnen Sie  $x$  so, dass das Volumen der Praline den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie hierfür auch die Höhe  $h$  der Praline. ☐

22.0 Der Gepäckraum eines Flugzeuges kann im Querschnitt mithilfe der Funktion  $p(x) = 0,5x^2 - 3,125$  beschrieben werden. Das Gepäck soll dabei in Containern mit rechteckiger Querschnittsfläche untergebracht werden (vgl. Abbildung). Die Längeneinheit ist Meter und kann bei den Berechnungen weggelassen werden. (Abitur 2011 AII)



22.1 Stellen Sie eine Gleichung für die Querschnittsfläche  $A(x)$  der Container in Abhängigkeit von  $x$  auf und bestimmen Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge. ☒

(Teilergebnis:  $A(x) = -x^3 + 6,25x$ )

22.2 Berechnen Sie  $x$  so, dass die Querschnittsfläche der Container den größten Inhalt annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall auch die Breite und Höhe der Container. ☐

23.0 Bei einem Quader ABCD mit der Seitenlänge a wird von der Ecke D ausgehend je eine Strecke der Länge x mit  $0 < x < a$  in Richtung A bis zum Punkt E und in Richtung C bis zum Punkt F abgetragen. Dann wird das Quadrat längs EF so gefaltet, dass das Dreieck FDE senkrecht zum ursprünglichen Quadrat steht. Die hochstehende Ecke D bildet mit den Punkten A, B, C, F und E eine Pyramide mit fünfeckiger Grundfläche. (Abitur 2013 AI)

23.1 Fertigen Sie eine Skizze des Quadrates ABCD mit den in 23.0 gegebenen Punkten und Strecken an. 

23.2 Stellen Sie das Volumen  $V_a(x)$  der entstehenden Pyramide in Abhängigkeit von x dar.

Die Höhe der Pyramide h ist gegeben durch  $h = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ . 

(Mögliches Ergebnis:  $V_a(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}(2a^2x - x^3)$ )

23.3 Bestimmen Sie x so, dass das Volumen der Pyramide den absolut größten Wert annimmt.

Berechnen Sie für diesen Fall und mit  $a = 3$  Volumen und Höhe der Pyramide. 

24.0 Eine Schule veranstaltet eine Projektwoche zum Thema „Work-Life-Balance“. Zum Abschluss erhalten alle Teilnehmer je einen Relax-Ball, der in einer zylinderförmigen Schachtel verpackt ist. Von dieser ist bekannt, dass sie eine Oberfläche von  $180 \text{ cm}^2$  besitzt. Bei der Rechnung wird auf Einheiten verzichtet. (Abitur 2013 All)

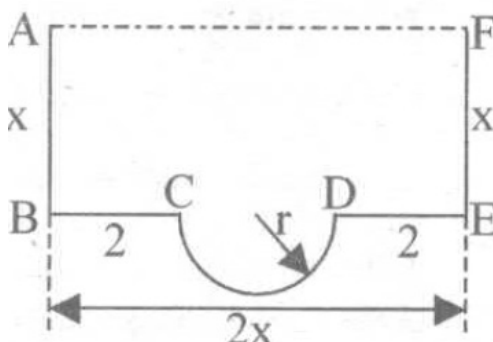
24.1 Zeigen Sie, dass für das Volumen der Schachtel in Abhängigkeit vom Zylinderradius r gilt:  $V(r) = -\pi \cdot r^3 + 90r$ . 

24.2 Nach Informationen des Verbraucherschutzes kann eine Verpackung dann als unzulässig deklariert werden, wenn die Füllmenge vom Fassungsvermögen einer Verpackung um mehr als 30% abweicht.

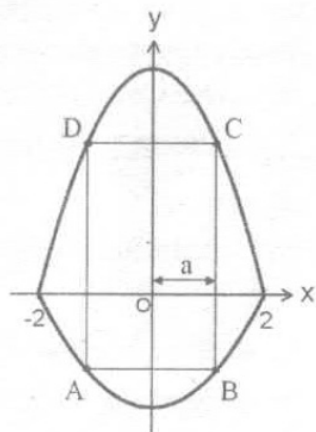
Prüfen Sie, ob eine Verpackung dieser Anforderung gerecht wird, wenn die Schachtel mit  $r = 3,1 \text{ cm}$  einen Ball mit dem Durchmesser von 60 mm enthält.

Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. 

- 25.0 Der Querschnitt eines Abflusskanals ist begrenzt durch ein Rechteck und einen Halbkreis mit Radius  $r$ . Alle Angaben sind in Meter. Auf Einheiten wird in der Rechnung verzichtet. (Abitur 2014 AI)



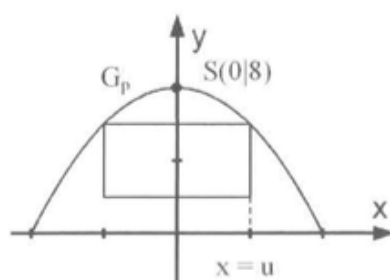
- 25.1 Zeigen Sie, dass sich die Maßzahl  $A(x)$  der Querschnittsfläche des Kanals in Abhängigkeit von  $x$  durch  $A(x) = (2 + 0,5\pi)x^2 - 2\pi x + 2\pi$  darstellen lässt. ☒
- 25.2 Die Strecken  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[DE]$  und  $[EF]$  besitzen in der Summe höchstens eine Länge von 12 m. Weisen Sie nach, dass dann für die sinnvolle maximale Definitionsmenge  $D_A$  der Funktion  $A: x \mapsto A(x)$  gilt:  $D_A = ]2; 4]$ . ☒
- 25.3 Bestimmen Sie  $x$  so, dass die zugehörige Querschnittsfläche maximalen Inhalt annimmt. ☐
- 25.4 Nun sei  $x = 4$ . Der Kanal ist bis 1 m unter der Oberkante gefüllt. Berechnen Sie, wie viel Prozent der Querschnittsfläche des Kanals ausgelastet sind. ☒
- 26.0 Die Graphen der reellen Funktionen  $p$  und  $q$  mit  $p(x) = -x^2 + 4$  und  $q(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$  und  $D_p = D_q = [-2; 2]$  bilden die nebenstehend abgebildete Fläche. Darin eingeschrieben ist das Rechteck ABCD, dessen Eckpunkte auf den Graphen der Funktionen  $p$  und  $q$  liegen. (Abitur 2014 AII)



26.1 Bestimmen Sie die Maßzahl  $A(a)$  der Fläche des Rechtecks in Abhängigkeit von  $a$  und geben Sie eine sinnvolle maximale Definitionsmenge  $D_A$  an. ☒  
(Mögliches Teilergebnis:  $A(a) = -3a^3 + 12a$ )

26.2 Bestimmen Sie  $a$  so, dass die zugehörige Fläche maximalen Inhalt annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall die Maßzahlen für die Fläche, Breite und Länge des Rechtecks. ☐

27.0 Auf einem Campingplatz möchte der Pächter in einem Zelt ein Kino einrichten. Als Projektionsfläche dient eine Seitenwand, welche durch die Parabel  $G_p$  und der  $x$ -Achse begrenzt wird. Am Boden hat das Zelt eine Spannweite von 20 m. Bei den folgenden Rechnungen wird auf Einheiten verzichtet. (Abitur 2015 AI)



27.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm  $p(x)$  der Parabel  $G_p$ . ☐  
(Mögliches Ergebnis:  $p(x) = -0,08x^2 + 8$ )

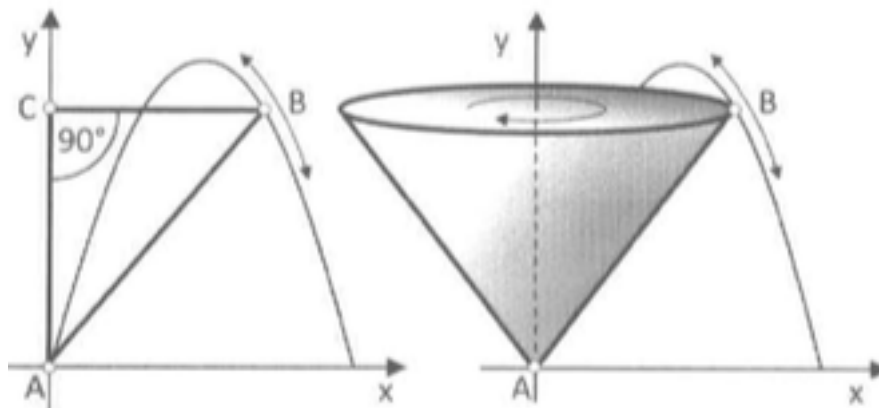
27.2 Es ist beabsichtigt, eine Leinwand von 7 m x 4 m anzubringen, wobei sich die Unterkante der Leinwand in einer Höhe von 3 m befindet. Untersuchen Sie durch Rechnung, ob dies an der Seitenwand möglich ist. ☒

27.3.0 Ein Filmverleih rät dem Pächter zu einer Leinwand bei einer Unterkante in 3 m Höhe (siehe Skizze 27.0).

27.3.1 Stellen Sie die Maßzahl  $A(u)$  des Flächeninhalts der Leinwand auf und bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge  $D_A$  der Funktion  $A: u \mapsto A(u)$ . ☒  
(Mögliches Teilergebnis:  $A(u) = -0,16u^3 + 10u$ )

27.3.2 Ermitteln Sie  $u$  so, dass  $A(u)$  den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall Höhe, Breite und Flächeninhalt der Leinwand. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. ☐

- 28.0 Das Dreieck ABC in untenstehender Abbildung rotiert um die y-Achse und dabei entsteht ein Kegel. Der Punkt A ist der Ursprung des Koordinatensystems und der Punkt B liegt im I. Quadranten auf der Parabel  $G_q$  mit  $q(x) = -x^2 + 8x$  und  $x \in \mathbb{R}$ .  
(Abitur 2015 All)



- 28.1 Stellen Sie eine Gleichung  $V(r)$  für das Volumen des Kegels auf, wobei  $r = \overline{BC}$  der Radius des Kegels ist. ☒

(Mögliches Ergebnis:  $V(r) = -\frac{1}{3}\pi r^4 + \frac{8}{3}\pi r^3$ )

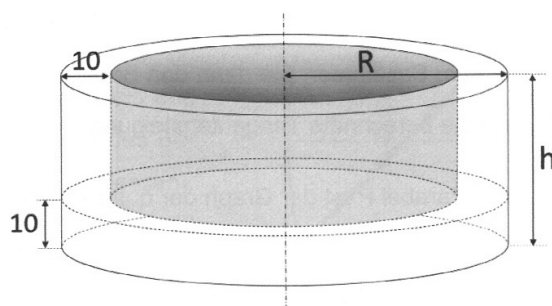
- 28.2 Ermitteln Sie die maximale sinnvolle Definitionsmenge  $D_V$  der Funktion  $V: r \mapsto V(r)$ . ☐

- 28.3 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B so, dass das Kegelvolumen seinen absolut größten Wert annimmt und berechnen Sie das maximale Kegelvolumen. ☐

- 29.0 Ein Planschbecken soll entsprechend folgender Skizze hergestellt werden, wobei der Boden und die Wand luftgefüllte Hohlkammern mit einer Dicke von 10 cm sind. Die Summe aus Radius R und Höhe h soll konstant 90 cm betragen. (Abitur 2016 AI)

- 29.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, welche die Maßzahl des Volumens des mit Luft gefüllten Teils des Planschbeckens in Abhängigkeit von R beschreibt. ☒

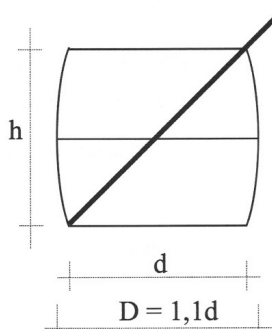
(mögliches Ergebnis:  $V(R) = \pi \cdot (-10R^2 + 1700R - 8000)$ )



- 29.2 Mit der Vorgabe  $10 < R \leq 55$  soll die Funktion  $V: R \mapsto V(R)$  den absolut größten Wert annehmen. Berechnen Sie für diesen Fall die maximale Füllhöhe des Planschbeckens. ☐

30.0 Ein symmetrischer Trinkjoghurtbecher in der Form eines Fasses besitzt das Volumen

$V = \frac{1}{12} \pi \cdot h \cdot (2D^2 + d^2)$ . Hierbei ist  $d$  jeweils der Durchmesser des Deckels und des Bodens und  $D$  der maximale Durchmesser des Bechers auf halber Höhe (alle Längen in cm gemessen). Weiterhin soll  $D$  10 % größer sein als  $d$ . Der Becher soll so konstruiert sein, dass ein 13 cm langer Strohhalm genau um 3 cm aus dem Becher herausragt, wenn er diagonal im Becher liegt (siehe Abbildung). (Abitur 2016 All)

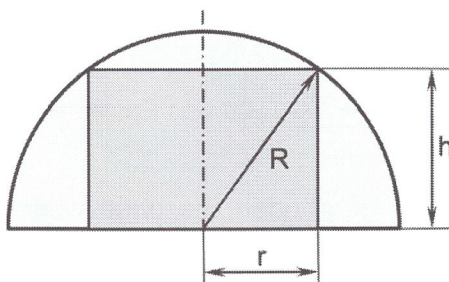


30.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion  $V$  auf, die die Maßzahl des Bechervolumens in Abhängigkeit von der Höhe  $h$  beschreibt. ☒

(mögliches Ergebnis:  $V(h) = \frac{57}{200} \pi \cdot (-h^3 + 100h)$ )

30.2 Mit der Vorgabe  $5 \leq h \leq 9$  soll der Becher für eine kostenlose Probe das geringste Volumen aufweisen. Berechnen Sie für diesen Fall die Höhe  $h$  in cm und das zugehörige Volumen in  $\text{cm}^3$  auf eine Nachkommastelle gerundet. ☐

31.0 Einer Halbkugel mit Radius  $R = 10$  cm soll ein Zylinder mit Radius  $r$  und Höhe  $h$  einbeschrieben werden (siehe Skizze). Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2017 AI)

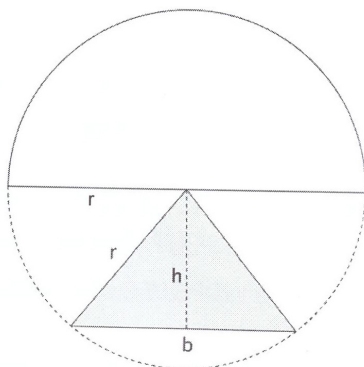


31.1 Ermitteln Sie die Maßzahl  $V(h)$  des Volumens des Zylinders in Abhängigkeit von der Höhe  $h$  und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion  $V: h \mapsto V(h)$  an, wenn die Höhe  $h$  mindestens 6 cm betragen soll. ☒

(Mögliches Teilergebnis:  $V(h) = h\pi(100 - h^2)$ )

31.2 Berechnen Sie  $h$  so, dass  $V(h)$  den absolut größten Wert annimmt und untersuchen Sie, ob das maximale Volumen  $V_{\max}$  des Zylinders mehr als die Hälfte des Halbkugelvolumens beträgt. ☐

- 32.0 Ein Designstudio hat eine Nachttischleuchte entworfen. Diese besteht aus einem halbkugelförmigen Schirm mit Radius  $r = 12$  cm und einem Leuchtenfuß in der Form eines geraden Kreiskegels mit der Höhe  $h$  und dem Durchmesser  $b$  in der Grundfläche (siehe Skizze). Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2017 All)

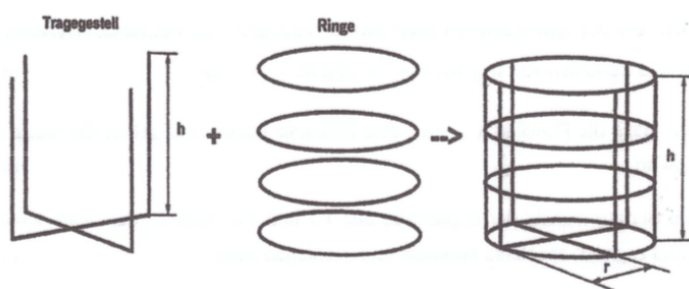


- 32.1 Bestimmen Sie die Maßzahl  $V(h)$  des Volumens des Fußes der Leuchte in Abhängigkeit von  $h$ .

(Mögliches Ergebnis:  $V(h) = \frac{\pi}{3}(-h^3 + 144h)$ )

- 32.2 Aus technischen Gründen wird für die Funktion  $V: h \mapsto V(h)$  als Definitionsbereich  $D_V = [2; 8]$  gewählt.  
Bestimmen Sie die Höhe  $h$  des Leuchtenfußes so, dass die Maßzahl seines Volumens den absolut größten Wert annimmt. Nach Auffassung der Designer würde dann die Leuchte die ansprechendsten Proportionen besitzen.

- 33.0 Ein Bastler möchte sich mithilfe folgender Bauanleitung das Grundgerüst für einen zylinderförmigen Abfallkorb mit Höhe  $h$  und Radius  $r$  (alle Längen in Meter gemessen) aus Draht bauen (siehe Skizze). (Abitur 2018 AI)



Für das Vorhaben kauft er sich Draht mit der Länge 6 m. Die Einzelteile werden selbst hergestellt und zusammengelötet. Die Dicke des Drahts ist zu vernachlässigen. Bei Berechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

- 33.1 Bestimmen Sie die Maßzahl  $V(r)$  des Volumens des Abfallkorbes in Abhängigkeit von  $r$ .

(Mögliches Ergebnis:  $V(r) = \pi \left( \frac{3}{2}r^2 - r^3 - 2\pi r^3 \right)$ )

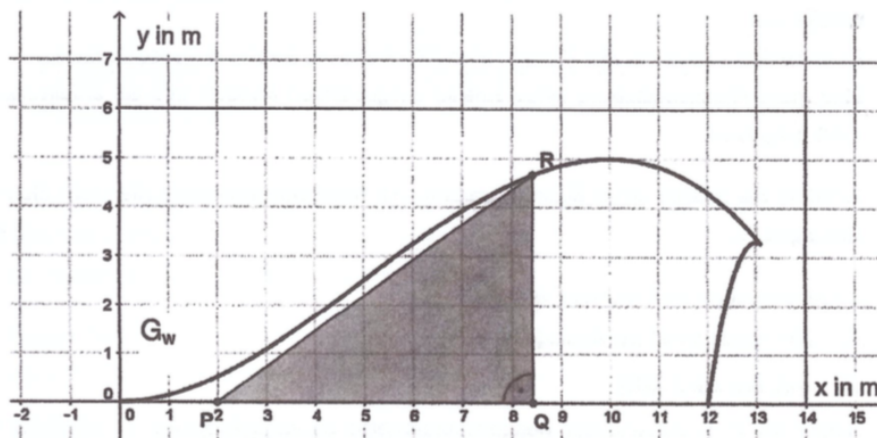
33.2 Aus praktischen Gründen wird für die Funktion  $V: r \mapsto V(r)$  als Definitionsmenge

$D_V = [0, 1; 0, 2]$  gewählt.

Berechnen Sie den Radius  $r$  des Abfallkorbs für den Fall, dass die Maßzahl des Volumens ihren absolut größten Wert annimmt.

Runden Sie Ihr Ergebnis auf drei Nachkommastellen. ○

34.0 Auf der Außenwand eines neuen Hallenbades soll dessen Logo, eine Welle, abgebildet werden. Der Architekt möchte ein großes Fenster in Form eines rechtwinkligen Dreiecks (siehe Skizze  $\triangle PQR$ ) innerhalb der Welle anbringen. (Abitur 2018 All)



Das Fenster soll am Punkt  $P(2/0)$  beginnen. Seine Breite  $\overline{PQ}$  soll mindestens 5 m und höchstens 10 m betragen. Der Punkt R soll auf der oberen Begrenzungslinie (Graph  $G_w$ ) der Welle liegen, welche durch die Funktion  $w: x \mapsto -0,01x^3 + 0,15x^2$  beschrieben wird. Bei Berechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

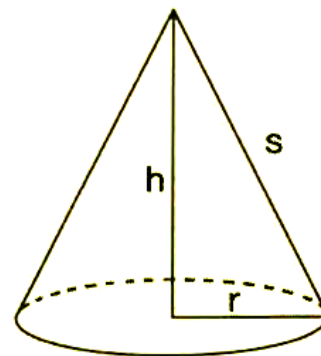
34.1 Zeigen Sie, dass die Maßzahl A der Fläche des Fensters abhängig von der x-Koordinate des Punktes Q durch die Funktionsgleichung  $A(x) = 0,005(-x^4 + 17x^3 - 30x^2)$  beschrieben wird und geben Sie für die Funktion A einen Definitionsbereich  $D_A$  an, der den Vorgaben von 34.0 entspricht. ⚡

34.2 Der Architekt möchte das Hallenbad möglichst hell gestalten. Aus diesem Grund soll die Fläche des Fensters möglichst groß sein. Bestimmen Sie die x-Koordinate des Punktes Q, für welche die Maßzahl der Fläche A maximal wird. Berechnen Sie für diesen Fall Breite, Höhe und Fläche des Fensters. Ermitteln Sie den prozentualen Anteil der Fensterfläche an der Logofläche, wenn diese  $36 \text{ m}^2$  beträgt. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. ○

- 35.0 Ein Tipi Zelt in einem Skigebiet hat die Form eines geraden Kreiskegels, dessen Mantellinie die Länge  $s = 8$  m hat (siehe Zeichnung). Das Zelt besitzt ein Innenvolumen, das bei gleichbleibender Länge der Mantellinie von der Höhe  $h$  des Zeltes abhängt. Der jeweilige Funktionswert der Funktion  $V: h \mapsto V(h)$  beschreibt dieses Innenvolumen.

Aus optischen Gründen soll dabei die Höhe  $h$  des Tipi Zeltes mindestens 4 m und maximal 6 m betragen. Dabei steht  $h$  für die Höhe des Zeltes in m und  $V(h)$  für das Volumen des Zeltes in  $\text{m}^3$ .

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.  
(Abitur 2021 AI)



- 35.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion  $V$  auf. ☒

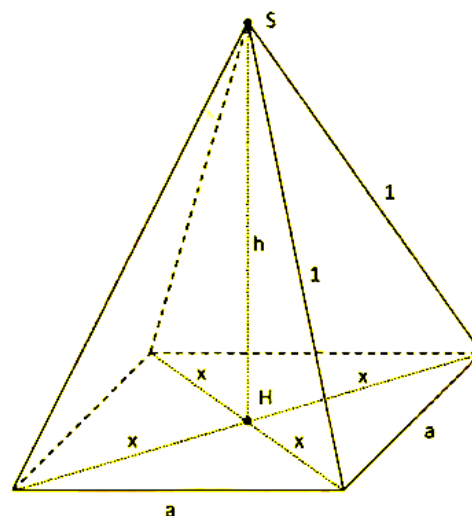
(mögliches Teilergebnis:  $V(h) = -\frac{1}{3}\pi h^3 + \frac{64}{3}\pi h$ )

- 35.2 Bestimmen Sie unter den oben genannten Vorgaben, für welche Höhe  $h$  das Tipi Zelt den maximalen Rauminhalt aufweist. Berechnen Sie für diesen Fall den Durchmesser des Bodens des Tipi Zeltes. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. ☐

- 36.0 Als Teilnehmer eines Auswahlverfahrens zur Einstellung von Werkstudenten bei einer großen Molkerei wird Ihnen folgende Aufgabe gestellt: Ein Schokodrink soll in einen Tetra Pak abgefüllt werden, welcher die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat. Die vier Seitenkanten der Pyramide sollen aus verpackungstechnischen Gründen jeweils eine feste Länge von 1 dm haben. Die Spitze  $S$  der Pyramide liegt senkrecht über dem Punkt  $H$ , in dem sich die Diagonalen der Grundfläche im rechten Winkel schneiden.

Aus verkaufstechnischen Gründen soll die Höhe des Tetra Paks mindestens 0,4 dm und höchstens 0,6 dm betragen.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.  
(Abitur 2021 AII)

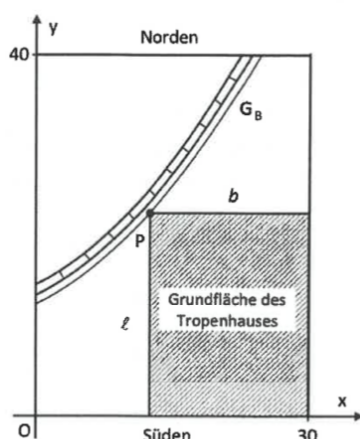


- 36.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion  $V: h \mapsto V(h)$  auf. Dabei steht  $h$  für die Höhe der Pyramide in dm und  $V(h)$  für das Volumen der Pyramide in  $\text{dm}^3$ . ☒

(mögliches Ergebnis:  $V(h) = -\frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}h$ )

- 36.2 Bestimmen Sie unter den oben genannten Vorgaben, für welche Höhe  $h$  der Tetra Pak den maximalen Rauminhalt aufweist. Berechnen Sie dieses maximale Volumen. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. ☐

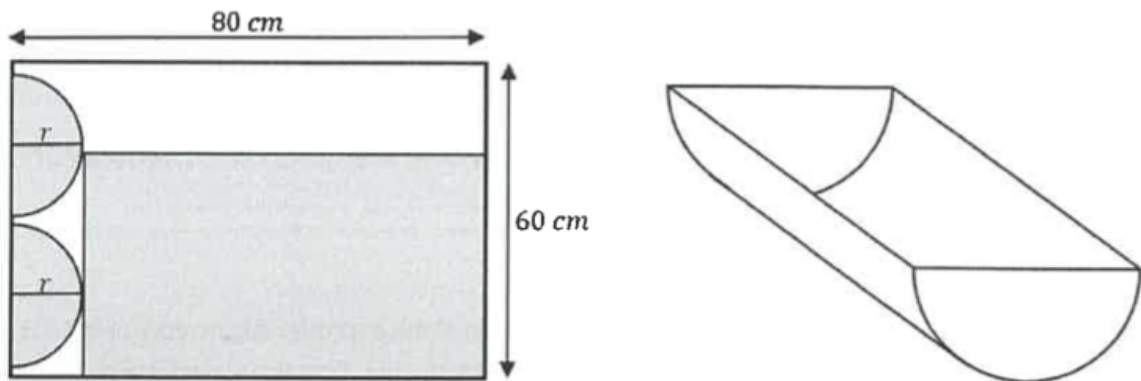
- 37.0 Eine brach liegende Grundstücksfläche hat einen rechteckigen Zuschnitt mit den Abmessungen 30 m x 40 m und wird von einer Bahntrasse durchschnitten (siehe Abbildung). Dieses Grundstück wird dem direkt angrenzenden Zoo kostenlos überlassen. Der Zoobetreiber plant als Attraktion ein Tropenhaus mit rechteckiger Grundfläche (Schraffur im Bild), in dem unter anderem Schmetterlinge zum Bestaunen untergebracht werden sollen. Zwei Wände des Hauses sollen auf der unteren und rechten Grundstücksgrenze liegen. Der linke obere Begrenzungspunkt P des Hauses liegt auf der – in sicherem Abstand zur Bahntrasse – eingezeichneten parabelförmigen Begrenzungslinie  $G_B$ . Diese Begrenzungslinie ist Teil des Graphen der Funktion  $B: x \mapsto 0,025x^2 + 0,5x + 12,5$  mit  $x \in \mathbb{R}_0^+$ . Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



- 37.1 Eine erste Planung sieht eine Hauslänge  $\ell = 25\text{m}$  vor. Bestimmen Sie hierfür die Maßzahl  $A_1$  der Grundfläche des Tropenhauses. Runden Sie Ihr Ergebnis ganzzahlig.
- (Ergebnis:  $A_1 \approx 388$ )
- 37.2.0 Die Planung soll dahingehend optimiert werden, dass die Grundfläche des Tropenhauses den größtmöglichen Flächeninhalt hat und somit Pflanzen und Besuchern möglichst viel Platz geboten werden kann.
- 37.2.1 Stellen Sie einen Term  $A(x)$  auf, der die Maßzahl des Flächeninhalts der Grundfläche in Abhängigkeit von der x-Koordinate des Punktes  $P(x|B(x))$  angibt.
- (Mögliches Ergebnis:  $A(x) = -0,025x^3 + 0,25x^2 + 2,5x + 375$ )
- 37.2.2 Damit die Baurichtlinien eingehalten werden können, muss das Gebäude von der West- und Nordseite des Grundstückes einen vorgeschriebenen Abstand haben. Damit ergibt sich für die Funktion A die Definitionsmenge  $D_A = [1; 24]$ . Ermitteln Sie die Breite  $b$  des Tropenhauses so, dass die Grundfläche des Tropenhauses ihren absolut größten Wert  $A_{\max}$  annimmt und berechnen Sie  $A_{\max}$ .

37.2.3 Berechnen Sie den Flächengewinn in Prozent im Vergleich zur ursprünglichen Planung (siehe Teilaufgabe 37.1). ○

38.0 Aus einer rechteckigen Stahlplatte werden die Teile für einen Blumenkasten in Form eines halben Zylinders mit Radius  $r$  ausgestanzt, wie es in der Abbildung unten links grau markiert dargestellt ist. Für den Blumenkasten (siehe Abbildung unten rechts) werden zwei Seitenteile sowie eine halbe Mantelfläche benötigt. Der Blumenkasten wird zusammen mit einem Gestell verkauft, das nicht aus der Stahlplatte gefertigt wird. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.



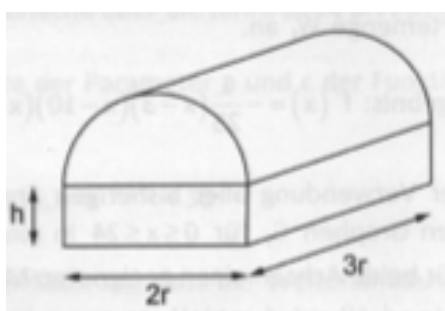
38.1 Weisen Sie nach, dass für das Volumen  $V(r)$  des Blumenkastens in Abhängigkeit vom Radius  $r$  (gemessen in cm) gilt:  $V(r) = 40r^2\pi - 0,5r^3\pi$ . Begründen Sie, dass für die mathematisch sinnvolle Definitionsmenge gilt:  $D_V = ]0;15]$ . ⚡

38.2 Berechnen Sie den Radius  $r$  so, dass der Blumenkasten das absolut größte Volumen annimmt. Berechnen Sie das maximale Volumen auf ganze  $\text{cm}^3$  gerundet. ○

39.0 Ein Tiergarten plant den Bau eines Tropenhauses, in dem ein künstliches Ökosystem mit Lebensbedingungen für tropische Pflanzen- und Tierarten geschaffen werden soll. Das Tropenhaus soll die Form eines Quaders mit aufgesetztem Halbzylinder bekommen. Der Radius des Halbzylinders wird mit  $r$  bezeichnet. Der Quader hat die Breite  $2r$ , die Länge  $3r$  und die Höhe  $h$  (siehe Skizze).

Um möglichst ideale klimatische Bedingungen zu schaffen, sollen die Außenwände des Tropenhauses und das Dach aus Glas bestehen. Hierfür sind  $1000 \text{ m}^2$  Glas vorgesehen. Die Maßzahl des Volumens des Tropenhauses in Abhängigkeit vom Radius  $r$  des Halbzylinders lässt sich durch die Funktionswerte der Funktion  $V: r \mapsto V(r)$

beschreiben. Aus den Baurichtlinien geht hervor, dass der Radius  $r$  des Halbzylinders maximal  $8,5 \text{ m}$  betragen darf. Der Tiergartenbetreiber fordert hierfür mindestens  $4 \text{ m}$ . Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.  
(Abitur 2022 AI)

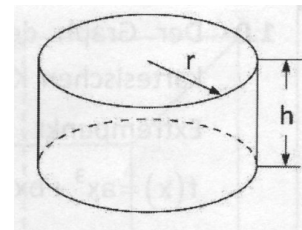


39.1 Stellen Sie eine Gleichung der in 39.0 eingeführten Funktion  $V$  auf. Bestimmen Sie dazu vorab die Maßzahl  $A$  des Flächeninhalts der insgesamt zu verglasenden Oberfläche des Tropenhauses in Abhängigkeit des Radius des Halbzylinders und der Höhe des Quaders.   
(mögliche Ergebnisse:  $A(r, h) = 10rh + 4\pi r^2$  und  $V(r) = 600r - 0,9\pi r^3$ )

39.2 Um den Pflanzen und Tieren möglichst viel Lebensraum zur Verfügung zu stellen, soll das Tropenhaus maximalen Rauminhalt besitzen.  
Bestimmen Sie den Radius  $r$  so, dass die Maßzahl des Volumens des Tropenhauses den absoluten größten Wert annimmt und geben Sie diesen maximalen Wert an. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. 

40.0 An einem Küstenabschnitt stranden immer wieder Delfine.

Diese werden in einer Auffangstation gesund gepflegt, bis sie wieder in freier Natur überleben können. Um die Kapazität der Auffangstation zu erhöhen, soll ein zusätzliches Becken aus Edelstahl angefertigt werden, welches die Form eines geraden Kreiszylinders hat und nach oben offen ist.



Dazu steht ein begrenzter Vorrat an Edelstahlblechen zur Verfügung. Diese haben modellhaft insgesamt eine Fläche von  $180\pi\text{m}^2$ . Aus Platzgründen kann das Becken nur einen maximalen Durchmesser von 20 m haben.

Die Funktion  $V:r \mapsto V(r)$  beschreibt die Maßzahl des Volumens des Beckens in Kubikmeter in Abhängigkeit vom Radius  $r$  in Metern.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle. (Abitur 2023 AI)

40.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion  $V$  auf. Begründen Sie, dass für die mathematisch maximale Definitionsmenge der Funktion  $V$  gilt:  $D_V = ]0;10]$  ☒

(mögliches Ergebnis:  $V(r) = -\frac{1}{2}\pi r^3 + 90\pi r$ )

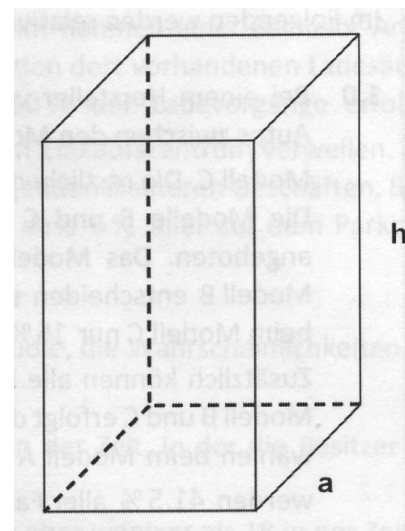
40.2 Zeigen Sie, dass unter den oben genannten Vorgaben das Becken für einen Radius von  $r = 2\sqrt{15}$  den maximalen Rauminhalt aufweist. Überprüfen Sie anschließend, ob dieses Becken für eine vorübergehende Haltung von drei Delfinen ausreicht, wenn pro Delfin  $360\text{m}^3$  Wasser zur Verfügung stehen sollen. ☐

40.3 Berechnen Sie für den unter 40.2 gegebenen Beckenradius die Größe der Grundfläche des Beckens  $A_0$  in Quadratmetern. ☐

- 41.0 Die Firma FACTUS soll für eine Süßwarenhersteller quaderförmige Verpackungen für Schokoladenbonbons produzieren. Der Auftraggeber verlangt, dass die Verpackung eine quadratische Grundfläche aufweist und dass die Summe aus Länge, Breite und Höhe 45 cm beträgt, damit der Verpackungsautomat die gefalteten Verpackungen bearbeiten und befüllen kann. Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche wird mit  $a$  bezeichnet.

Die Werte der Funktion  $V: a \mapsto V(a)$  geben jeweils das Volumen der Verpackung in  $\text{cm}^3$  an. Damit die Verpackung handlich bleibt, soll die Seitenlänge  $a$  der Grundfläche mindestens 10 cm und höchstens 20 cm betragen.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen der Einheiten verzichtet werden.  
(Abitur 2023 All)



- 41.1 Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Funktion  $V$ . 

(mögliches Ergebnis:  $V(a) = 45a^2 - 2a^3$ )

- 41.2 Ermitteln Sie die Maße einer Verpackung der Firma FACTUS, die den Vorgaben entspricht und dabei maximales Volumen besitzt. Geben Sie die spezielle Form dieser Verpackung an und berechnen Sie das Volumen. 

- 41.3 Die Firma FACTUS bekommt den Auftrag, 6000 würfelförmige und bedruckte Verpackungen mit einer Kantenlänge von 15 cm herzustellen.  
Aus Kostengründen überlegt die Firma, ob sie den Druckauftrag an die eigene Druckerei FACTUS-Print geben soll oder ob das Angebot der Konkurrenzfirma PAPPDruck günstiger ist. Bei den Verpackungen werden alle Außenflächen außer der Bodenfläche bedruckt.

|              | Druckkosten                   | Rabatt                              |
|--------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| FACTUS-Druck | 8 Cent pro 1000 $\text{cm}^2$ | Kein Rabatt                         |
| PAPPDruck    | 9 Cent pro Verpackung         | Bedruckung jedes 10. Würfels gratis |

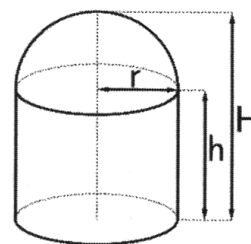
Entscheiden Sie rechnerisch, welche Firma aus wirtschaftlicher Sicht den Druckauftrag bekommen sollte. 

42.0 Ein Hersteller von Tauchflasche plant ein neues Tauchflaschenmodell.

Die Wandstärke des Materials wird vernachlässigt. Die Tauchflasche hat vereinfacht die Form eines geraden Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel (siehe Abbildung). Die Firma gibt für die Zylinderhöhe  $h$

(in dm) die Bedingung  $h(r) = \frac{4}{r} - \frac{3r}{2}$  vor. Bei den Berechnungen

wird auf das Mitführen von Einheiten verzichtet. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. (Abitur 2024 AII)



42.1 Zeigen Sie, dass die Maßzahl des Volumens (in  $\text{dm}^3$ ) der Tauchflasche in Abhängigkeit vom Zylinderradius  $r$  (in dm) durch die Funktion  $V$  mit der Funktionsgleichung

$$V(r) = -\frac{5}{6}r^3\pi + 4r\pi \quad \text{beschrieben werden kann. } \textcircled{\otimes}$$

42.2 Der Hersteller gibt für das neue Modell einen Radius von 0,85 dm bis 1,4 dm vor.

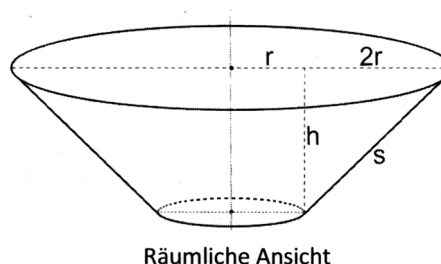
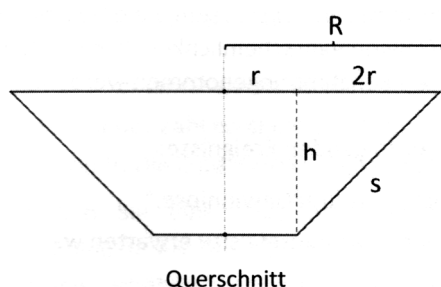
Ermitteln Sie den Radius  $r$ , für den das Volumen der Tauchflasche maximal wird und berechnen Sie die Maßzahl dieses maximalen Volumens.  $\textcircled{\circ}$

43.0 Ein Pflanzgefäß hat die Form eines umgedrehten geraden Kreiskegelstumpfes, dessen Querschnittsfläche ein Trapez ist (siehe nachfolgende nicht maßstabsgetreue Skizzen). Der obere Kreisradius  $R$  ist dreimal so groß wie der untere Kreisradius  $r$ . Die Länge der Seitenkante  $s$  beträgt 25 cm. Vorgaben der Produktion legen fest, dass die Höhe  $h$  des Pflanzgefäßes mindestens 15 cm und höchstens 23 cm beträgt.

Die Dicke der „Wände“ darf bei den weiteren Betrachtungen vernachlässigt werden.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

(Abitur 2025 AII)



Ohne Nachweis darf verwendet werden, dass für das Volumen dieses geraden

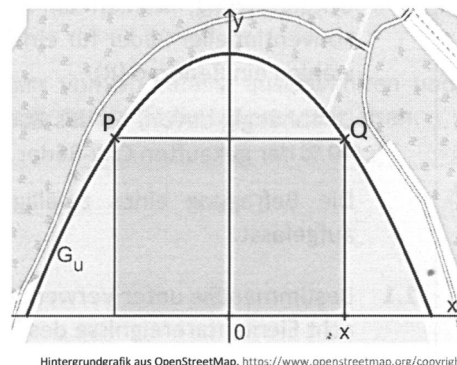
Kreiskegelstumpfes gilt:  $V(r;h) = \frac{13}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

43.1 Zeigen Sie, dass für das Volumen des Pflanzgefäßes in Abhängigkeit von der Höhe  $h$  gilt:

$$V(h) = \frac{13}{12} \cdot \pi \cdot (625h - h^3) \quad \textcircled{\otimes}$$

43.2 Bestimmen Sie den Wert für die Höhe  $h$  des Pflanzgefäßes so, dass das Volumen des Pflanzgefäßes maximal ist. Berechnen Sie das maximale Volumen sowie den dazugehörigen oberen Durchmesser des Pflanzgefäßes.  $\textcircled{\circ}$

- 44.0 Um das Kulturangebot im Ort zu verbessern, plant eine Stadt den Bau einer großen, rechteckigen Seebühne im nördlichen Bereich des Stadtsees. Zur Modellierung der Situation wurde ein Koordinatensystem gewählt, dessen x-Achse entlang der südlichen Begrenzungslinie der Seebühne verläuft. Diese liegt 100 m vom nördlichsten Punkt des Sees entfernt. Die y-Achse verläuft von Süden nach Norden mittig durch die geplante Seebühne.



Die Längeneinheit auf beiden Achsen ist Meter.

Im beschriebenen Koordinatensystem lässt sich die nördliche Begrenzungslinie des Sees näherungsweise durch den Graphen der Funktion  $u$  mit der Funktionsgleichung  $u(x) = -0,01x^2 + 100$  und der Definitionsmenge  $D_u = [-100; 100]$  beschreiben.

Damit ein direkter Zugang vom Ufer zur Bühne möglich ist, sollen die beiden nördlichen Eckpunkte P und Q der Seebühne direkt am Ufer liegen.

Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen wird verzichtet.

(Abitur 2026 AII)

- 44.1 Stellen Sie einen Funktionsterm  $A(x)$  für die Funktion  $A$  auf, deren Funktionswerte die Maßzahl des Flächeninhalts der Seebühne in Abhängigkeit der halben Bühnenbreite  $x$  beschreiben. 

(mögliches Ergebnis:  $A(x) = -0,02 \cdot (x^3 + 10000x)$ )

- 44.2 Aufgrund der Anforderungen der Bühnenaufbauten gilt  $x \in [10; 80]$ . Bestimmen Sie den Wert für  $x$ , für den der Flächeninhalt der Bühne den absolut größten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall die Abmessungen der Seebühne jeweils auf ganze Meter gerundet. 

## Lösungen

1  $V_{\text{Quader}} = a^2 \cdot b$

Umriß des Quaders  $= 8a + 4b = 72 \Rightarrow b = 18 - 2a$

$\Rightarrow V = a^2 \cdot (18 - 2a) = 18a^2 - 2a^3 \quad a \in ]0;9[$

Bestimmung des maximalen Volumens:

$$\frac{dV(a)}{da} = 36a - 6a^2 \Rightarrow 36a - 6a^2 = 0 \Rightarrow 6a(6 - a) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ und } a = 6$$

$$\frac{d^2V(a)}{da^2} = 36 - 12a \Rightarrow \left. \frac{d^2V}{da^2} \right|_{a=0} > 0 \text{ und } \left. \frac{d^2V}{da^2} \right|_{a=6} < 0$$

$\Rightarrow$  Maximum für  $a = 6$

Die Funktion  $V(a)$  hat im Bereich  $]0;9[$  nur einen relativen Hochpunkt, also tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow a = 6$  ist absolutes Maximum;  
Der Quader hat die Kanten  $a = 6$  cm und  $b = 6$  cm und sein Volumen beträgt  $216 \text{ cm}^3$ .

2  $V_{\text{Quader}}(a) = (32 - 2a) \cdot (20 - 2a) \cdot a = (640 - 40a - 64a + 4a^2) \cdot a$

$= 4a^3 - 104a^2 + 640a \quad a \in ]0;10[$

Bestimmung des maximalen Volumens:

$$\frac{dV(a)}{da} = 12a^2 - 208a + 640 \Rightarrow 12a^2 - 208a + 640 = 0 \Rightarrow a = 4 \text{ und } a = 13\frac{1}{3}$$

$$\frac{d^2V(a)}{da^2} = 24a - 208 \Rightarrow \left. \frac{d^2V}{da^2} \right|_{a=4} < 0$$

$\Rightarrow$  Maximum für  $a = 4$

Die Funktion  $V(a)$  hat im Bereich  $]0;10[$  nur einen relativen Hochpunkt, also tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow a = 4$  ist absolutes Maximum;  
Die Seitenlänge der herausgeschnittenen Quadrate beträgt 4 cm und das maximale Volumen beträgt  $(32 - 2 \cdot 4) \cdot (20 - 2 \cdot 4) \cdot 4 \text{ cm}^3 = 1152 \text{ cm}^3$

3.1

$$U(k) = 2 \cdot (k + (p(k) - f(k))) = 2 \cdot (k + (-k^2 + 4k - 6 - \frac{1}{3}k^3 + k^2 + 3k - \frac{2}{3})) =$$

$$2 \cdot (-\frac{1}{3}k^3 + 8k - \frac{20}{3}) = -\frac{2}{3}(k^3 - 24k + 20)$$

3.2

$$\frac{dU(k)}{dk} = -\frac{2}{3}(3k^2 - 24) \Rightarrow -\frac{2}{3}(3k^2 - 24) = 0$$

$$\Rightarrow (3k^2 - 24) = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{8}$$

(nur  $k = \sqrt{8}$  im Definitionsbereich)

$$\frac{d^2U(k)}{dk^2} = -\frac{2}{3}(6k) = -4k \Rightarrow \left. \frac{d^2U}{dk^2} \right|_{k=\sqrt{8}} = -4 \cdot \sqrt{8} < 0$$

$\Rightarrow$  Maximum für  $k = \sqrt{8}$

Da die Funktion  $U(k)$  nur einen relativen Extrempunkt hat, nämlich ein Maximum, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich auf und damit ist das relative Maximum auch das absolute Maximum der Funktion  $U(k)$ .

$$4.1 \quad A(u) = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot f(u) = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot \left( \frac{1}{9}u^4 - 2u^2 + 9 \right) = \frac{1}{9}(u^5 - 18u^3 + 81u)$$

4.2

$$\frac{dA(u)}{du} = \frac{1}{9}(5u^4 - 54u^2 + 81) \Rightarrow \frac{1}{9}(5u^4 - 54u^2 + 81) = 0$$

$$\Rightarrow (5u^4 - 54u^2 + 81) = 0$$

$$\text{Substitution: } z = u^2 \Rightarrow 5z^2 - 54z + 81 = 0 \Rightarrow z_1 = 9 \quad z_2 = \frac{9}{5}$$

$$\text{Resubstitution: } u^2 = 9 \Rightarrow u_1 = 3 \quad u_2 = -3$$

$$u^2 = \frac{9}{5} \Rightarrow u_3 = \sqrt{\frac{9}{5}} \quad u_4 = -\sqrt{\frac{9}{5}}$$

( $u_1, u_2$  und  $u_4$  sind nicht im Definitionsbereich)

$$\frac{d^2A(u)}{du^2} = \frac{1}{9}(20u^3 - 108u) \Rightarrow \left. \frac{d^2A}{du^2} \right|_{u=\sqrt{\frac{9}{5}}} \approx -10,73 < 0$$

$\Rightarrow$  Maximum für  $u = \sqrt{\frac{9}{5}}$

Die Funktion  $A(u)$  hat im Intervall  $]0;3[$  nur einen Extrempunkt (Hochpunkt), somit tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich auf und damit ist das relative Maximum auch das absolute Maximum.

- 5 1. Summand:  $x$  und 2. Summand:  $\sqrt{10} - x$

Summe  $s(x)$  der Quadrate dieser Summanden:

$$s(x) = x^2 + (\sqrt{10} - x)^2 = x^2 + 10 - 2x\sqrt{10} + x^2 = 2x^2 - 2\sqrt{10}x + 10$$

$$D_s = ]0; \sqrt{10}[$$

$$\frac{ds(x)}{dx} = s'(x) = 4x - 2\sqrt{10} \Rightarrow 4x - 2\sqrt{10} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$s''(x) = 4 \Rightarrow s''\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = 4 > 0 \Rightarrow \text{Minimum für } x = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Die Funktion  $s(x)$  hat nur einen Extrempunkt (Minimum), somit tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich auf und damit ist das relative Minimum auch das absolute Minimum.

$$\text{Für die Summanden ergibt sich: } x_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad x_2 = \sqrt{10} - \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

- 6  $A = a \cdot b$

Mit dem Satz von Pythagoras (im rechtwinkligen Teildreieck) folgt:

$$b = \sqrt{(2r)^2 - a^2} = \sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$A(a) = a \cdot \sqrt{4r^2 - a^2} \quad (A(a))^2 = g(a) = a^2 \cdot (4r^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow \text{mit } r = 5: g(A) = 100a^2 - a^4 \quad D_g = ]0; 10[$$

$$\frac{dg(a)}{da} = 200a - 4a^3 \Rightarrow 200a - 4a^3 = 0 \Rightarrow 4a(50 - a^2) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = 0 \quad a_2 = \sqrt{50} \quad a_3 = -\sqrt{50}$$

$a_1$  und  $a_3$  sind nicht im Definitionsbereich

$$\frac{d^2g(a)}{da^2} = 200 - 12a^2 \Rightarrow \left. \frac{d^2g}{da^2} \right|_{a=\sqrt{50}} = 200 - 12 \cdot 50 = -400 < 0$$

$$\Rightarrow \text{Maximum für } a = \sqrt{50}$$

Die Funktion  $g(a)$  hat im Definitionsbereich nur ein Extrema (Hochpunkt), somit tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich auf und damit ist das relative Maximum auch das absolute Maximum für  $g(a)$  und damit auch für  $A(a)$ .

$$\text{Absolut größter Flächeninhalt: } A(\sqrt{50}) = \sqrt{50} \cdot \sqrt{100 - 50} = 50$$

Geometrische Interpretation:

Das Rechteck mit der absolut größten Flächenmaßzahl 50 ist ein Quadrat mit der Seitenlänge  $\sqrt{50}$ .

7.1 Besucherzahl  $z$  in Abhängigkeit von  $x$ :  $z(x) = 200 - 10x$

Eintrittspreis  $p$  in Abhängigkeit von  $x$ :  $p(x) = 10 + x$

Einnahmen:

$$E = z \cdot p \Rightarrow E(x) = (200 - 10x)(10 + x) = -10x^2 + 100x + 2000$$

Definitionsmenge:

$$z(x) \geq 0 \Rightarrow 200 - 10x \geq 0 \Rightarrow x \leq 20$$

$$\Rightarrow D_E = [0; 20]$$

7.2

$$\frac{dE(x)}{dx} = E'(x) = -20x + 100 \Rightarrow -20x + 100 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$E''(x) = -20 \Rightarrow E''(5) = -20 < 0 \Rightarrow \text{Maximum für } x = 5$$

Die Funktion  $E(x)$  hat im Definitionsbereich nur einen Extrempunkt (Maximum), somit tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich auf und damit ist das relative Maximum auch das absolute Maximum.

Berechnung der größten Einnahmen:  $p(5) = 10 + 5 = 15$

Die größten Einnahmen ergeben sich bei einem Eintrittspreis von 15 DM.

8.1 Volumenmaßzahl  $V$  des Zylinders:  $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

Mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich:

$$(2r)^2 + h^2 = 12^2 \Rightarrow 4r^2 = 144 - h^2 \Rightarrow r^2 = 36 - \frac{h^2}{4}$$

$$\Rightarrow V(h) = \left(36 - \frac{h^2}{4}\right) \cdot \pi \cdot h = \left(-\frac{h^3}{4} + 36h\right) \cdot \pi$$

Definitionsmenge:  $V(h)$  muss größer Null sein

$$\left(-\frac{h^3}{4} + 36h\right) \cdot \pi > 0 \Rightarrow \frac{h}{4}(-h^2 + 144) > 0$$

$$\Rightarrow h > 0 \text{ und } -h^2 + 144 > 0 \Rightarrow h^2 < 144 \Rightarrow |h| < 12 \Rightarrow -12 < h < 12$$

$$\text{wegen } h > 0 \text{ gilt: } D_V = ]0; 12[$$

## 8.2

$$\frac{dV(h)}{dh} = \left(-\frac{3}{4}h^2 + 36\right) \cdot \pi \Rightarrow \left(-\frac{3}{4}h^2 + 36\right) \cdot \pi = 0 \Rightarrow \left(-\frac{3}{4}h^2 + 36\right) = 0$$

$$\Rightarrow h^2 = 48 \Rightarrow h_1 = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \quad h_2 = -\sqrt{48} = -4\sqrt{3}$$

$h_2$  ist nicht im Definitionsbereich

$$\frac{d^2V(h)}{dh^2} = -\frac{6}{4}h \cdot \pi \Rightarrow \frac{d^2V}{dh^2} \Big|_{h=4\sqrt{3}} = -\frac{6}{4} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \pi < 0$$

$\Rightarrow$  Maximum für  $h = 4\sqrt{3}$

Die Funktion  $V(h)$  hat im Definitionsbereich nur einen Extrempunkt (Maximum), somit tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich auf und damit ist das relative Maximum auch das absolute Maximum.

Berechnung des größten Volumens:

$$V(4\sqrt{3}) = \left(-\frac{(4\sqrt{3})^3}{4} + 36 \cdot 4\sqrt{3}\right) \cdot \pi = 96\sqrt{3} \cdot \pi \approx 522,37$$

Für den zugehörigen Radius gilt:

$$r^2 = 36 - \frac{(4\sqrt{3})^2}{4} = 36 - \frac{48}{4} = 36 - 12 = 24 \Rightarrow r = \pm\sqrt{24}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

9  $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3}(r^2\pi) \cdot h$

Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich:  $r^2 + h^2 = s^2$

Mit  $s = 12$  folgt  $r^2 = 144 - h^2$

$$\Rightarrow V(h) = \frac{1}{3}\pi(144 - h^2) \cdot h = \frac{1}{3}\pi(-h^3 + 144h)$$

Definitionsmenge:  $V(h)$  muss größer 0 sein

$$-h^2 + 144 > 0 \Rightarrow h^2 < 144 \Rightarrow |h| < 12 \Rightarrow -12 < h < 12$$

$$\Rightarrow D_V = ]0;12[ \quad (da \ h > 0)$$

$$\frac{dV(h)}{dh} = \frac{1}{3}\pi(-3h^2 + 144) \Rightarrow \frac{1}{3}\pi(-3h^2 + 144) = 0 \Rightarrow -3h^2 + 144 = 0$$

$$\Rightarrow h^2 = 48 \Rightarrow |h| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h_1 = 4\sqrt{3} \quad h_2 = -4\sqrt{3} \quad (\notin D_V)$$

$$\frac{d^2V(h)}{dh^2} = \frac{1}{3}\pi(-6h) \Rightarrow \frac{d^2V}{dh^2} \Big|_{h=4\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\pi(-6 \cdot 4\sqrt{3}) < 0$$

$\Rightarrow$  Maximum für  $h = 4\sqrt{3}$

Die Funktion  $V(h)$  hat im Definitionsbereich nur einen Extrempunkt (Maximum), somit tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich auf und damit ist das relative Maximum auch das absolute Maximum.

$$\text{Es gilt: } r_1^2 = 144 - h_1^2 \Rightarrow r_1^2 = 144 - 48 = 96 \Rightarrow r_1 = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

$$r_2 = -4\sqrt{6} \text{ nicht möglich, da } r > 0$$

$$\text{Verhältnis: } \frac{r_1}{h_1} = \frac{4\sqrt{6}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$10.1 \quad A(a) = (3-a) \cdot g(a) = (3-a) \cdot \left(a^2 + \frac{8}{3}\right) = -a^3 + 3a^2 - \frac{8}{3}a + 8$$

$$D_A = \left[0; \sqrt{\frac{10}{3}}\right]$$

10.2

$$\frac{dA(a)}{da} = -3a^2 + 6a - \frac{8}{3} \Rightarrow -3a^2 + 6a - \frac{8}{3} = 0$$

$$\Rightarrow a_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-3) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)}}{-6} \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3} \quad a_2 = \frac{4}{3}$$

$$\frac{d^2A(a)}{da^2} = -6a + 6 \Rightarrow \frac{d^2A}{da^2}\left(\frac{2}{3}\right) = -6 \cdot \frac{2}{3} + 6 > 0 \quad \frac{d^2A}{da^2}\bigg|_{a=\frac{4}{3}} = -6 \cdot \frac{4}{3} + 6 < 0$$

$$\Rightarrow \text{Minimum für } a = \frac{2}{3} \Rightarrow T\left(\frac{2}{3}; 7,259\right)$$

$$\Rightarrow \text{Maximum für } a = \frac{4}{3} \Rightarrow H\left(\frac{4}{3}; 7,407\right)$$

Der Vergleich des y-Wertes des relativen Hochpunktes H mit den Randwerten

$$A(0) = 8 \text{ und } A\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = 7,046 \text{ ergibt das absolute Maximum der in } D_A \text{ stetigen}$$

Funktion für  $a = 0$ .

$$\text{Es gilt: } A_{\max} = A(0) = 8$$

11.1 Berechnung des Funktionsterms der Geraden DC, auf der der Punkt P liegt:

$$y = mx + t \Rightarrow m = \frac{4-6}{10-6} = -\frac{1}{2}$$

$$D(6;6) \text{ einsetzen: } 6 = -\frac{1}{2} \cdot 6 + t \Rightarrow t = 9$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 9$$

$$A_{\text{Rechteck}} = (10-a) \cdot \left(-\frac{1}{2}(10-a) + 9\right) = (10-a) \cdot \left(\frac{1}{2}a + 4\right) =$$

$$-\frac{1}{2}a^2 + a + 40 = -\frac{1}{2}(a^2 - 2a - 80)$$

Definitionsmenge:  $D_A = [0; 4]$  (da P auf der Strecke CD liegen soll)

11.2

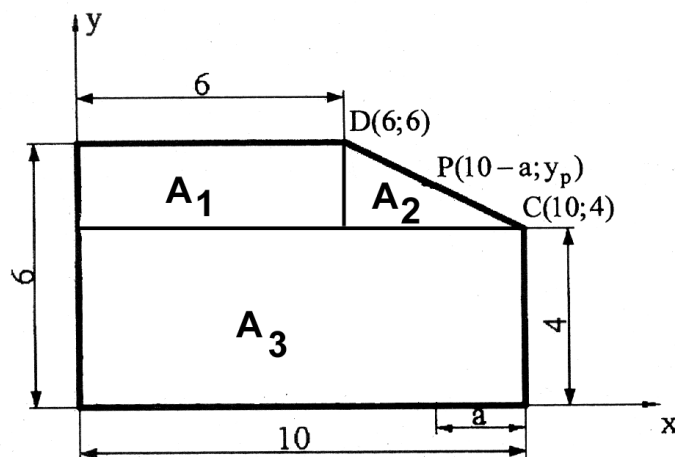
$$\frac{dA(a)}{da} = -\frac{1}{2}(2a-2) \Rightarrow -\frac{1}{2}(2a-2)=0 \Rightarrow 2a-2=0 \Rightarrow a=1$$

$$\frac{d^2 A(a)}{da^2} = -\frac{1}{2} \cdot 2 \Rightarrow \left. \frac{d^2 A}{da^2} \right|_{a=1} = -\frac{1}{2} \cdot 2 < 0$$

⇒ Maximum für  $a=1$

Die Funktion  $A(a)$  hat im Definitionsbereich nur einen Extrempunkt (Maximum), somit tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich auf und damit ist das relative Maximum auch das absolute Maximum (auch klar, da der Graph  $G_A$  der Funktion  $A$  eine nach unten geöffnete Parabel ist).

Berechnung der Fläche des Fünfecks:



$$A_1 = 6 \cdot 2 = 12 \quad A_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \quad A_3 = 10 \cdot 4 = 40$$

$$\Rightarrow A_{\text{Fünfeck}} = 12 + 4 + 40 = 56 \text{ FE}$$

Fläche des Rechtecks:

$$A(1) = -\frac{1}{2} \cdot (1^2 - 2 \cdot 1 - 80) = -\frac{1}{2} \cdot (-81) = 40,5$$

Berechnung des Abfalls:

$$\frac{A_{\text{Rechteck}}}{A_{\text{Fünfeck}}} = \frac{40,5}{56} \approx 0,7232 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{\text{Abfall}}}{A_{\text{Fünfeck}}} = \frac{15,5}{56} = 0,2768$$

⇒ 27,68 % des Fünfecks sind Abfall;

12.1 Es soll gelten:  $4s+h=28 \Rightarrow h=28-4s$

Für die Volumenmaßzahl  $V$  der Pyramide gilt:  $V = \frac{1}{3}s^2 \cdot h$

$$\Rightarrow V(s) = \frac{1}{3}s^2 \cdot (28-4s) = -\frac{4}{3}(s^3 - 7s^2)$$

Definitionsmenge:  $\frac{1}{3}s^2 \cdot (28-4s) > 0 \Rightarrow 28-4s > 0$  und  $s^2 > 0$   
 $\Rightarrow s < 7$  und  $|s| > 0 \Rightarrow D_V = ]0;7[$  (da  $s > 0$ )

12.2

$$\frac{dV(s)}{ds} = -\frac{4}{3}(3s^2 - 14s) \Rightarrow -\frac{4}{3}(3s^2 - 14s) = 0 \Rightarrow (3s^2 - 14s) = 0$$

$$\Rightarrow 3s(s - \frac{14}{3}) = 0 \Rightarrow s_1 = 0 (\notin D_V) \quad s_2 = \frac{14}{3}$$

$$\frac{d^2V(s)}{ds^2} = -\frac{4}{3}(6s - 14) \Rightarrow \frac{d^2V}{ds^2} \Big|_{s=\frac{14}{3}} = -\frac{4}{3}(6 \cdot \frac{14}{3} - 14) < 0$$

$$\Rightarrow \text{Maximum für } s = \frac{14}{3}$$

Die Funktion  $V(s)$  hat im Definitionsbereich nur einen Extrempunkt (Maximum), somit tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich auf und damit ist das relative Maximum auch das absolute Maximum.

Berechnung des größten Pyramidenvolumens:

$$V_{\max} = V(\frac{14}{3}) = -\frac{4}{3}((\frac{14}{3})^3 - 7(\frac{14}{3})^2) = 67,75$$

13.1

Für die Flächenmaßzahl  $A$  der Querschnittsfläche gilt:  $A = \frac{1}{2}h^2\pi + sh$

Für die Umfangsmaßzahl gilt:  $h\pi + s = 5 \Rightarrow s = 5 - h\pi$

$$\Rightarrow A(h) = \frac{1}{2}h^2\pi + (5 - h\pi) \cdot h = -\frac{1}{2}h^2\pi + 5h$$

Sinnvolle Definitionsmenge:  $5 - h\pi \geq 0 \Rightarrow h \leq \frac{5}{\pi} \Rightarrow D_A = \left]0; \frac{5}{\pi}\right]$

### 13.2

$$\frac{dA(h)}{dh} = -h\pi + 5 \Rightarrow -h\pi + 5 = 0 \Rightarrow h = \frac{5}{\pi}$$

Skizze:

$\Rightarrow$  die Funktion ist in  $D_h$  streng monoton steigend

$\Rightarrow$  absolutes Maximum am Rand  $h = \frac{5}{\pi}$

$$\text{Maximale Querschnittsfläche: } A_{\max} = A\left(\frac{5}{\pi}\right) = \frac{25}{2\pi} \approx 3,98$$

$$h_{\max} = \frac{5}{\pi} \Rightarrow s_{\min} = 5 - \frac{5}{\pi} \cdot \pi = 0$$

$\Rightarrow$  Der flächengrößte Querschnitt ist halbkreisförmig

### 14.1

$$V(x) = (x+3)(x+3)(x-3) = (x^2-9)(x-3) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$$

$$\text{Sinnvolle Definitionsmenge: } D_v = ]3; \infty[$$

### 14.2

$$x^3 = x^3 + 3x^2 - 9x - 27 \Rightarrow 3x^2 - 9x - 27 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 3 \cdot (-27)}}{6} = \frac{9 \pm \sqrt{405}}{6}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{5}) \quad (x_2 = \frac{3}{2}(1 - \sqrt{5})) \notin D_v$$

$\Rightarrow$  Würfel und Quader haben für  $x = \frac{3}{2}(1 + \sqrt{5})$  gleiches Volumen

### 15.1

Der rechte obere Eckpunkt  $P_a$  des Rechtecks liegt auf der Geraden  $g$  mit den Punkten

$A(8/0)$  und  $B(0/6)$

$$\Rightarrow g: y = mx + t \quad m = \frac{6-0}{0-8} = -\frac{3}{4} \Rightarrow g: y = -\frac{3}{4}x + 6$$

$$\Rightarrow P_a(a / -\frac{3}{4}a + 6)$$

Flächeninhalt  $A(a)$  des rechteckigen Fensters:

$$A(a) = 2a \cdot (-\frac{3}{4}a + 6 - 1) = 2a \cdot (-\frac{3}{4}a + 5) = -\frac{3}{2}a^2 + 10a$$

$$\text{Sinnvolle Definitionsmenge: } a > 0 \quad -\frac{3}{4}a + 5 > 0 \Rightarrow a < \frac{20}{3}$$

$$D_A = ]0; \frac{20}{3}[$$

15.2

$$\frac{dA(a)}{da} = -3a + 10 \Rightarrow -3a + 10 = 0 \Rightarrow a = \frac{10}{3}$$

$$\frac{d^2A(a)}{da^2} = -3 \Rightarrow \frac{d^2A(a)}{da^2} \Big|_{a=\frac{10}{3}} = -3 < 0 \Rightarrow \text{Maximum für } a = \frac{10}{3}$$

Da  $A(a)$  im Bereich  $\left] 0; \frac{20}{3} \right[$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in

diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$\Rightarrow a = \frac{10}{3}$  absolutes Maximum

$$\text{Höhe dieses Fensters: } h_{\max} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{3} + 5 = \frac{5}{2}$$

$$\text{Breite dieses Fensters: } b_{\max} = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$$

16.1

$$A_{\text{Fenster}} = 4r \cdot b + r^2 \pi$$

$$\text{Umfang Fenster: } U = b + 4r + b + 2r\pi \Rightarrow 2b + 4r + 2r\pi = 10 \Rightarrow b = 5 - 2r - r\pi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(r) &= 4r \cdot (5 - 2r - r\pi) + r^2 \pi = 20r - 8r^2 - 4r^2 \pi + r^2 \pi = \\ &= 20r - 8r^2 - 3r^2 \pi = 20r - (8 + 3\pi)r^2 \end{aligned}$$

$$\text{Sinnvolle Definitionsmenge: } D_A = \left] 0; \frac{5}{2 + \pi} \right[$$

16.2

$$\frac{dA(r)}{dr} = 20 - 2(8 + 3\pi)r$$

$$\Rightarrow 20 - 2(8 + 3\pi)r = 0 \Rightarrow 2(8 + 3\pi)r = 20 \Rightarrow r = \frac{10}{8 + 3\pi} \approx 0,574$$

$$\frac{d^2A(r)}{dr^2} = -2(8 + 3\pi) \Rightarrow \frac{d^2A(r)}{dr^2} \Big|_{r=0,574} < 0 \Rightarrow \text{Maximum für } r = 0,574$$

Da  $A(r)$  im Bereich  $\left] 0; \frac{5}{2 + \pi} \right[$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in

diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$\Rightarrow$  absolutes Maximum für  $r = 0,574$

$$A(0,574) = 20 \cdot 0,574 - (8 + 3\pi) \cdot (0,574)^2 \approx 5,739$$

$$A_{\text{Rechteck}} = 4 \cdot 0,574 \cdot (5 - 2 \cdot 0,574 - 0,574 \cdot \pi) \approx 4,704$$

$$\Rightarrow \frac{A_{\text{Rechteck}}}{A_{\max}} = \frac{4,704}{5,739} \approx 0,8197 \text{ (81,97\%)}$$

**17.1**

$$V_{\text{Trommel}} = r^2 \pi h$$

$$O_{\text{Trommel}} = 2r\pi h + 2r^2\pi \Rightarrow 2r\pi h + 2r^2\pi = 2400 \cdot \pi \Rightarrow h = \frac{2400 \cdot \pi - 2r^2\pi}{2r\pi} = \frac{1200}{r} - r$$

$$\Rightarrow V(r) = r^2 \pi \left( \frac{1200}{r} - r \right) = 1200r\pi - r^3\pi = \pi(1200r - r^3)$$

**17.2**

$$\frac{dV(r)}{dr} = \pi(1200 - 3r^2) \Rightarrow \pi(1200 - 3r^2) = 0 \Rightarrow 1200 - 3r^2 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = 400 \Rightarrow r_1 = 20 \quad (r_2 = -20) \notin D$$

Nachweis Maximum:

$$\frac{d^2V(r)}{dr^2} = \pi(-6r) \Rightarrow \frac{d^2V(r)}{dr^2} \Big|_{r=20} < 0 \Rightarrow \text{Maximum für } r = 20$$

Da  $V(r)$  im Bereich  $[12;30]$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  
 $\Rightarrow$  absolutes Maximum für  $r = 20$

**18.1**

$$V_{\text{Zylinder}} = r^2 \pi h = \left( \frac{d}{2} \right)^2 \pi h = \frac{1}{4} d^2 \pi h$$

$$h + d = 100 \Rightarrow h = 100 - d$$

$$\Rightarrow V(d) = \frac{1}{4} d^2 \pi (100 - d) = \pi \left( 25d^2 - \frac{1}{4} d^3 \right)$$

 Definitionsmenge:  $D_V = ]0;100[$

18.2

$$\frac{dV(d)}{dd} = \pi(50d - \frac{3}{4}d^2) \Rightarrow \pi(50d - \frac{3}{4}d^2) = 0 \Rightarrow 50d - \frac{3}{4}d^2 = 0$$

$$\Rightarrow d(50 - \frac{3}{4}d) = 0$$

$$\Rightarrow (d_1 = 0) \notin D_v \quad 50 - \frac{3}{4}d = 0 \Rightarrow d = \frac{200}{3}$$

Nachweis Maximum:

$$\frac{d^2V(d)}{dd^2} = \pi(50 - \frac{3}{2}d) \Rightarrow \frac{d^2V(d)}{dd^2} \bigg|_{d=\frac{200}{3}} < 0 \Rightarrow \text{Maximum für } d = \frac{200}{3}$$

Da  $V(d)$  im Bereich  $]0;100[$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$$\Rightarrow \text{absolutes Maximum für } d = \frac{200}{3}$$

$$\Rightarrow h = 100 - \frac{200}{3} = \frac{100}{3}$$

19.1

$$V = 2a \cdot a \cdot h = 2a^2 \cdot h$$

$$O = 2 \cdot (2a \cdot h + a \cdot h) + 2a \cdot a = 6ah + 2a^2$$

$$\Rightarrow 6ah + 2a^2 = 4 \Rightarrow 6ah = 4 - 2a^2 \Rightarrow h = \frac{2}{3a} - \frac{1}{3}a$$

$$\Rightarrow V(a) = 2a^2 \left( \frac{2}{3a} - \frac{1}{3}a \right) = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a^3$$

19.2

$$h > 0 \Rightarrow \frac{2}{3a} - \frac{1}{3}a > 0 \Rightarrow 2 - a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < 2 \Rightarrow -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow D_a = ]0; \sqrt{2}[$$

**19.3**

$$\frac{dV(a)}{da} = \frac{4}{3} - 2a^2$$

$$\frac{dV(a)}{da} = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} - 2a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow (a_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}) \notin D \quad a_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Nachweis Maximum:

$$\frac{d^2V(a)}{da^2} = -4a \quad \left. \frac{d^2V(a)}{da^2} \right|_{a=\sqrt{\frac{2}{3}}} < 0 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ist Maximum}$$

Nachweis absolutes Maximum:

Da  $V(a)$  im Bereich  $]0; \sqrt{2}[$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ist absolutes Maximum}$$

$$\Rightarrow h = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{9} \text{ m } (\approx 0,54 \text{ m})$$

**20.1**

$$V = V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Kegel}} = r^2 \pi \cdot \frac{4}{3} h + \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h = \frac{5}{3} r^2 \pi h$$

$$s^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow r^2 = 225 - h^2$$

$$\Rightarrow V(h) = \frac{5}{3} (225 - h^2) \cdot \pi \cdot h = (375h - \frac{5}{3} h^3) \cdot \pi$$

Sinnvolle Definitionsmenge:

$$r^2 > 0 \Rightarrow 225 - h^2 > 0 \Rightarrow h^2 < 225 \Rightarrow |h| < 15$$

$$\Rightarrow D_V = ]0; 15[$$

## 20.2

$$\frac{dV(h)}{dh} = (375 - 5h^2) \cdot \pi$$

$$\frac{dV(h)}{dh} = 0 \Rightarrow 375 - 5h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 75 \Rightarrow (h_1 = -5\sqrt{3}) \notin D \quad h_2 = 5\sqrt{3}$$

Nachweis Maximum:

$$\frac{d^2V(h)}{dh^2} = -10h\pi \Rightarrow \frac{d^2V(h)}{dh^2} \Big|_{h=5\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow h = 5\sqrt{3} \text{ ist Maximum}$$

Nachweis absolutes Maximum:

Da  $V$  im Bereich  $]0; 15[$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem

Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$\Rightarrow$  absolutes Maximum für  $h = 5\sqrt{3}$

$$\Rightarrow V_{\max} = V(5\sqrt{3}) \approx 6801,75 \approx 6802 \text{ VE}$$

## 21.1

$$V_{\text{Praline}} = A_{\text{Querschnittsfläche}} \cdot x$$

$$A_{\text{Querschnittsfläche}} = A_{\text{Trapez}} + A_{\text{Dreieck}}$$

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{x + 0,5x}{2} \cdot \frac{1}{4}h \quad A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 0,5x \cdot \frac{3}{4}h$$

$$\Rightarrow A_{\text{Querschnittsfläche}} = \frac{x + 0,5x}{2} \cdot \frac{1}{4}h + \frac{1}{2} \cdot 0,5x \cdot \frac{3}{4}h = \frac{3}{16}xh + \frac{3}{16}xh = \frac{3}{8}xh$$

$$\Rightarrow V_{\text{Praline}} = \frac{3}{8}xh \cdot x = \frac{3}{8}x^2h$$

$$x + x + h = 8 \Rightarrow 2x + h = 8 \Rightarrow h = 8 - 2x$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{3}{8}x^2 \cdot (8 - 2x) = 3x^2 - 0,75x^3$$

$$\text{Sinnvolle Definitionsmenge: } 8 - 2x > 0 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow D = ]0; 4[$$

## 21.2

$$V'(x) = -2,25x^2 + 6x$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow -2,25x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2,25x + 6) = 0 \Rightarrow (x_1 = 0) \notin D \quad x_2 = \frac{8}{3}$$

Skizze von  $V'$ :

$$\Rightarrow x = \frac{8}{3} \text{ ist Maximum}$$

Da  $V$  im Bereich  $]0;4[$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$$\Rightarrow x = \frac{8}{3} \text{ ist absolutes Maximum}$$

$$\Rightarrow h = 8 - 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

Für  $x = \frac{8}{3}$  ergibt sich eine Höhe von  $\frac{8}{3}$ .

## 22.1

$$A(x) = 2 \cdot x \cdot (-p(x)) = 2x \cdot (-0,5x^2 + 3,125) = -x^3 + 6,25x$$

Sinnvolle Definitionsmenge:

$$p(x) = 0 \Rightarrow 0,5x^2 - 3,125 = 0 \Rightarrow x^2 = 6,25 \Rightarrow x_1 = -2,5 \quad x_2 = 2,5$$

$$\Rightarrow D_A = ]0;2,5[$$

## 22.2

$$A'(x) = -3x^2 + 6,25$$

$$-3x^2 + 6,25 = 0 \Rightarrow x^2 = 2\frac{1}{12} \Rightarrow (x_1 \approx -1,44) \notin D \quad x_2 \approx 1,44$$

Skizze von  $A'$ :

$$\Rightarrow x = 1,44 \text{ Maximum}$$

Da  $A$  im Bereich  $]0;2,5[$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

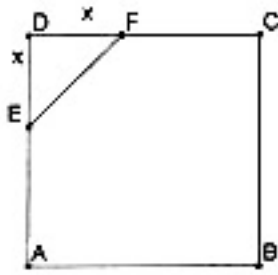
$$\Rightarrow x = 1,44 \text{ absolutes Maximum}$$

Breite der Container:  $2 \cdot 1,44 \approx 2,88 \text{ m}$

Höhe der Container:  $-p(1,44) \approx -0,5 \cdot 1,44^2 + 3,125 \approx 2,09 \text{ m}$

Die Breite der Container beträgt ca. 2,88 m und die Höhe ca. 2,09 m.

23.1



23.2

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

$$G = a^2 - \frac{1}{2}x^2 \quad h = \frac{\sqrt{2}}{2}x \quad (\text{gegeben})$$

$$\Rightarrow V_a(x) = \frac{1}{3} \cdot \left( a^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{\sqrt{2}}{6}x \cdot \left( a^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \left( a^2x - \frac{1}{2}x^3 \right)$$

23.3

$$V'_a(x) = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot (2a^2 - 3x^2)$$

$$V'_a(x) = 0 \Rightarrow 2a^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3}a^2 \Rightarrow (x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}a) \notin D \quad x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

Skizze von  $V'_a$ :

$$\Rightarrow \text{Maximum für } x = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

$\Rightarrow$  Da im Bereich  $]0; a[$  nur ein Extremum (Maximum) auftritt, gibt es in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}a \text{ absolutes Maximum}$$

$$a = 3: x = \sqrt{6} \quad h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{3} \quad V_3(\sqrt{6}) = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left( 18 \cdot \sqrt{6} - (\sqrt{6})^3 \right) = 2\sqrt{3}$$

24.1

$$V_{\text{Zylinder}} = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$O_{\text{Zylinder}} = 2r^2\pi + 2r\pi h \Rightarrow 2r\pi h = 180 - 2r^2\pi \Rightarrow h = \frac{90}{r\pi} - r$$

$$\Rightarrow V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot \left( \frac{90}{r\pi} - r \right) = 90r - r^3\pi$$

## 24.2

$$V(3,1) = 90 \cdot 3,1 - 3,1^3 \cdot \pi \approx 185,41 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Ball}} = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot 3^3 \cdot \pi \approx 113,10 \text{ cm}^3$$

$$185,41 \text{ cm}^3 \hat{=} 100\%$$

$$113,10 \text{ cm}^3 \hat{=} x\%$$

$$\Rightarrow x = \frac{113,10 \cdot 100\%}{185,41} = 60,1\%$$

$\Rightarrow$  Die Füllmenge weicht vom Fassungsvermögen um 39,1% ab.

$\Rightarrow$  Verpackung wird den Anforderungen des Verbraucherschutzes nicht gerecht.

## 25.1

$$A_{\text{Kanal}} = x \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \quad r = \frac{2x-4}{2} = x-2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(x) &= x \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot (x-2)^2 \cdot \pi = 2x^2 + \frac{1}{2} (x^2 - 4x + 4) \cdot \pi \\ &= 2x^2 + \frac{1}{2} x^2 \pi - 2x\pi + 2\pi = (2 + 0,5\pi)x^2 - 2x\pi + 2\pi \end{aligned}$$

## 25.2

$$x + 2 + 2 + x \leq 12 \Rightarrow 2x + 4 \leq 12 \Rightarrow x \leq 4$$

aus 25.1 gilt:  $r = x - 2 \Rightarrow x > 2$  (wegen  $r > 0$ )

$$\Rightarrow D_A = ]2; 4]$$

## 25.3

$$A'(x) = (4 + \pi)x - 2\pi$$

$$(4 + \pi)x - 2\pi = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{4 + \pi} (\approx 0,88)$$

Skizze von  $A'$ :

$$\Rightarrow \text{Minimum für } x = \frac{2\pi}{4 + \pi}$$

$\Rightarrow$  Absolutes Maximum muss am rechten Rand liegen  $\Rightarrow x = 4$

## 25.4

$$A(4) = 32 + 8\pi - 8\pi + 2\pi = 32 + 2\pi$$

$$\Rightarrow \frac{32 + 2\pi - 8}{32 + 2\pi} \approx 0,7910 \Rightarrow 79,1\%$$

Die Querschnittsfläche des Kanals ist zu 79,1% ausgelastet.

26.1

$$A(a) = 2a \cdot (p(a) - q(a)) = 2a \cdot \left( -a^2 + 4 - \frac{1}{2}a^2 + 2 \right) = 2a \cdot (-1,5a^2 + 6) = -3a^3 + 12a$$

$$D_A = ]0; 2[ \quad (da - 1,5a^2 + 6 > 0)$$

26.2

$$A'(a) = -9a^2 + 12$$

$$-9a^2 + 12 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow (a_1 = -\sqrt{\frac{4}{3}}) \notin D_A \quad a_2 = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

Skizze von  $A'$ :

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{4}{3}} \text{ HOP}$$

Da  $A$  im Bereich  $]0; 2[$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$$\Rightarrow \text{absolutes Maximum für } a = \sqrt{\frac{4}{3}};$$

$$A\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{3} \quad \text{Breite: } 2 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \text{Länge: } -1,5 \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 + 6 = 4$$

27.1

$$p(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

$$p(x) = a \cdot (x - 0)^2 + 8 = ax^2 + 8$$

$$p(10) = 0 \Rightarrow 100a + 8 = 0 \Rightarrow a = -0,08$$

$$\Rightarrow p(x) = -0,08x^2 + 8$$

27.2

$$p(3,5) = -0,08 \cdot 3,5^2 + 8 = 7,02$$

$\Rightarrow$  eine Leinwand mit 7 m x 4 m ist möglich

### 27.3.1

$$A(u) = 2u \cdot (p(u) - 3) = 2u \cdot (-0,08u^2 + 8 - 3) = -0,16u^3 + 10u$$

$$-0,08u^2 + 5 > 0 \Rightarrow -0,08u^2 + 5 = 0 \Rightarrow u^2 = 62,5 \Rightarrow u_1 = -\frac{5\sqrt{10}}{2} \quad u_2 = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

Skizze von  $(-0,08u^2 + 5)$ :

$$\Rightarrow D_A = \left] 0; \frac{5\sqrt{10}}{2} \right[$$

### 27.3.2

$$A'(u) = -0,48u^2 + 10$$

$$-0,48u^2 + 10 = 0 \Rightarrow u^2 = 20\frac{5}{6} \Rightarrow u_1 = \frac{5\sqrt{30}}{6} \quad \left( u_2 = -\frac{5\sqrt{30}}{6} \right) \notin D_A$$

Da  $A'$  eine nach unten geöffnete Parabel, ergibt sich für  $u = \frac{5\sqrt{30}}{6}$

das absolute Maximum für  $A$ .

$$A\left(\frac{5\sqrt{30}}{6}\right) \approx 30,43 \text{ m}^2 \quad \text{Breite: } 2u \approx 9,13 \text{ m} \quad \text{Höhe: } p(u) - 3 \approx 3,33 \text{ m}$$

### 28.1

$$V(r) = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot q(r) = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot (-r^3 + 8r) = -\frac{1}{3}r^4\pi + \frac{8}{3}r^3\pi$$

### 28.2

$$-r^2 + 8r > 0 \quad \text{und } r > 0$$

$$-r^2 + 8r = 0 \Rightarrow -r(r - 8) = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \quad r_2 = 8$$

Skizze von  $(-r^2 + 8r)$ :

$$\Rightarrow D_V = ]0; 8[$$

28.3

$$V'(r) = -\frac{4}{3}r^3\pi + 8r^2\pi$$

$$V'(r) = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3}r^2\pi(r-6) = 0 \Rightarrow (r_1 = 0) \notin D_V \quad r_2 = 6$$

Skizze von  $V''$ :

$\Rightarrow$  Maximum für  $r = 6$

Da  $V$  im Bereich  $]0;8[$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  
 $\Rightarrow$  absolutes Maximum für  $r = 6$

$$V_{\max} = -\frac{1}{3} \cdot 6^4 \cdot \pi + \frac{8}{3} \cdot 6^3 \cdot \pi = 144\pi \approx 452,39$$

B(6/12)

29.1

$$V = R^2\pi h - (R-10)^2\pi \cdot (h-10)$$

$$R+h=90 \Rightarrow h=90-R$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(R) &= R^2\pi(90-R) - (R-10)^2\pi \cdot (80-R) = \\ &= \pi \left[ 90R^2 - R^3 - (80R^2 - R^3 - 1600R + 20R^2 + 8000 - 100R) \right] = \\ &= \pi \left[ -10R^2 + 1700R - 8000 \right] \end{aligned}$$

29.2

$$V'(R) = \pi \cdot (-20R + 1700)$$

$$V'(R) = 0 \Rightarrow -20R + 1700 = 0 \Rightarrow R = 85$$

Skizze von  $V'$ :

$\Rightarrow G_V$  sms in  $]10;55[ \Rightarrow$  absolutes Maximum für  $R = 55$

$$\Rightarrow h = 90 - 55 = 35$$

$\Rightarrow$  Maximale Füllhöhe beträgt  $35 - 10 = 25$  cm.

30.1

$$V = \frac{1}{12} \pi h (2D^2 + d^2) = \frac{1}{12} \pi h \cdot [2 \cdot (1,1d)^2 + d^2] = \frac{1}{12} \pi h \cdot 3,42d^2$$

$$d^2 + h^2 = 100 \Rightarrow d^2 = 100 - h^2$$

$$\Rightarrow V(h) = \frac{1}{12} \pi h \cdot 3,42(100 - h^2) = \frac{57}{200} \pi \cdot (100h - h^3)$$

30.2

$$V'(h) = \frac{57}{200} \pi \cdot (100 - 3h^2)$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow 100 - 3h^2 = 0$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{100}{3} \Rightarrow \left( h_1 = -\sqrt{\frac{100}{3}} \right) \notin D \quad h_2 = \sqrt{\frac{100}{3}}$$

Skizze von  $V'$ :

$\Rightarrow$  absolutes Minimum für  $h = 9 \text{ cm}$

$$\Rightarrow V(9) \approx 153,1 \text{ cm}^3$$

31.1

$$V_{\text{Zylinder}} = r^2 \pi h$$

$$r^2 + h^2 = 10^2 \Rightarrow r^2 = 100 - h^2$$

$$\Rightarrow V(h) = (100 - h^2) \pi h = \pi(100h - h^3)$$

Sinnvolle Definitionsmenge:

$$100 - h^2 > 0 \quad 100 - h^2 = 0 \Rightarrow h_1 = -10 \quad h_2 = 10$$

Skizze:

$$\Rightarrow D_V = [6 : 10[ \quad (h \text{ soll mindestens } 6 \text{ cm sein})$$

### 31.2

$$V'(h) = \pi \cdot (100 - 3h^2)$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow 100 - 3h^2 = 0 \Rightarrow (h_1 \approx -5,77) \notin D_V \quad h_2 \approx 5,77$$

Skizze von  $V'$ :

$$\Rightarrow h = 5,77 \text{ Maximum}$$

Da  $V$  im Bereich  $[6;10[$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow$  absolutes Maximum für  $h = 5,77$

$$V_{\max} = V(5,77) \approx 1209,2 \text{ cm}^3 \quad \frac{1209,2}{2094,4} \approx 0,58$$

$$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \pi \approx 2094,4 \text{ cm}^3$$

Das maximale Volumen des Zylinders nimmt mehr als die Hälfte des Halbkugelvolumens ein.

### 32.1

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi h$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 = r^2 \Rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 = r^2 - h^2$$

$$\Rightarrow V(h) = \frac{1}{3} \cdot (r^2 - h^2) \pi h = \frac{1}{3} \pi (144h - h^3)$$

### 32.2

$$V'(h) = \frac{1}{3} \pi (144 - 3h^2)$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow 144 - 3h^2 = 0 \Rightarrow (h_1 = -\sqrt{48}) \notin D_V \quad h_2 = \sqrt{48}$$

Skizze von  $V'$ :

$$\Rightarrow h = \sqrt{48} \text{ Maximum}$$

Da  $V$  im Bereich  $[2;8]$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens ein

$$\Rightarrow h = \sqrt{48} \text{ absolutes Maximum}$$

33.1

$$V = r^2 \pi h$$

$$6 = 4h + 4r + 4 \cdot 2\pi r \Rightarrow 4h = 6 - 4r - 8\pi r \Rightarrow h = 1,5 - r - 2\pi r$$

$$\Rightarrow V(r) = r^2 \pi (1,5 - r - 2\pi r) = \pi (1,5r^2 - r^3 - 2\pi r^3)$$

33.2

$$V'(r) = \pi (3r - 3r^2 - 6\pi r^2) = 3\pi r (1 - r - 2\pi r)$$

$$3\pi r (1 - r - 2\pi r) = 0 \Rightarrow (r_1 = 0) \notin D_V \quad 1 - r - 2\pi r = 0 \Rightarrow r_2 \approx 0,137$$

Skizze von  $V'$ :

$\Rightarrow$  Maximum für  $r = 0,137$  m

Da  $V$  im Bereich  $[0,1;0,2]$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt,

tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$\Rightarrow r = 0,137$  absolutes Maximum

34.1

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} g \cdot h \quad g = x - 2 \quad h = w(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(x) &= \frac{1}{2} (x - 2) (-0,01x^3 + 0,15x^2) = \frac{1}{2} (-0,01x^4 + 0,17x^3 - 0,3x^2) = \\ &= 0,005(-x^4 + 17x^3 - 30x^2) \end{aligned}$$

$$D_A = [7;12]$$

### 34.2

$$A'(x) = 0,005(-4x^3 + 51x^2 - 60x)$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow -4x^3 + 51x^2 - 60x = 0 \Rightarrow x(-4x^2 + 51x - 60) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 = 0) \notin D_A \quad -4x^2 + 51x - 60 = 0 \Rightarrow (x_2 = 1,31) \notin D_A \quad x_3 = 11,44$$

Skizze von  $A'$ :

$\Rightarrow x = 11,44$  Maximum

Da  $A$  im Bereich  $[7;12]$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich

keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow x = 11,44$  absolutes Maximum

Breite:  $11,44 - 2 = 9,44$  Meter    Höhe:  $w(11,44) = 4,66$  Meter    Fläche:  $A(11,44) = 21,99 \text{ m}^2$

$$\frac{21,99}{36} = 0,6108 \Rightarrow 61,08\%$$

### 35.1

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi h \Rightarrow h^2 + r^2 = s^2 \Rightarrow r^2 = 8^2 - h^2 = 64 - h^2$$

$$\Rightarrow V(h) = \frac{1}{3}(64 - h^2)\pi h = \left(-\frac{1}{3}h^3 + \frac{64}{3}h\right) \cdot \pi$$

### 35.2

$$V'(h) = \pi \cdot \left(-h^2 + \frac{64}{3}\right)$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow -h^2 + \frac{64}{3} = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{64}{3}$$

$$\Rightarrow \left(h_1 = -\sqrt{\frac{64}{3}}\right) \notin D_V \quad h_2 = \sqrt{\frac{64}{3}} \approx 4,62 \text{ m}$$

Skizze von  $V'$ :

$\Rightarrow h = 4,62$  Maximum

Da  $V$  im Bereich  $[4;6]$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem

Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$\Rightarrow h = 4,62$  absolutes Maximum;

$$r^2 = 64 - 4,62^2 = 42,66 \Rightarrow \left(r_1 = -\sqrt{42,66}\right) \quad r_2 = \sqrt{42,66} \approx 6,53$$

$\Rightarrow$  der Durchmesser beträgt etwa  $2 \cdot 6,53 = 13,06 \text{ m}$

36.1

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$h^2 + x^2 = 1^2 \quad a^2 + a^2 = (2x)^2 \Rightarrow 4x^2 = 2a^2 \Rightarrow x^2 = 0,5a^2$$

$$\Rightarrow V(h) = \frac{1}{3} \cdot (2 - 2h^2) \cdot h = -\frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}h$$

$$D_V = [0, 4; 0, 6]$$

36.2

$$V'(h) = -2h^2 + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow -2h^2 + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \left( h_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \right) \notin D_V \quad h_2 = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,58$$

Skizze von  $V'$  :

$$\Rightarrow h = 0,58 \text{ Maximum}$$

Da  $V$  im Bereich  $[0, 4; 0, 6]$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt,

tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$$\Rightarrow h = 0,58 \text{ absolutes Maximum}$$

$$V_{\max} = V(0,58) \approx 0,26 \text{ dm}^3$$

37.1

$$0,025x^2 + 0,5x + 12,5 = 25 \Rightarrow 0,025x^2 + 0,5x - 12,5 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-0,5 \pm \sqrt{0,25 - 4 \cdot 0,025 \cdot (-12,5)}}{0,05} = \frac{-0,5 \pm \sqrt{1,5}}{0,05}$$

$$\Rightarrow (x_1 \approx -34,49) \notin D_A \quad x_2 \approx 14,49$$

$$\Rightarrow A_1 = 25 \cdot (30 - 14,49) \approx 388$$

37.2.1

$$\begin{aligned} A(x) &= (30 - x) \cdot (0,025x^2 + 0,5x + 12,5) = \\ &= 0,75x^2 + 15x + 375 - 0,025x^3 - 0,5x^2 - 12,5x = -0,025x^3 + 0,25x^2 + 2,5x + 375 \end{aligned}$$

**37.2.2**

$$A'(x) = -0,075x^2 + 0,5x + 2,5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-0,5 \pm \sqrt{0,25 - 4 \cdot (-0,075) \cdot 2,5}}{-0,15} = \frac{-0,5 \pm 1}{-0,15}$$

$$\Rightarrow x_1 = 10 \quad \left( x_2 = -\frac{10}{3} \right) \notin D_A$$

Skizze von  $A'$  :

$\Rightarrow x = 10$  Maximum

Da  $A$  im Bereich  $[0; \infty[$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow x = 10$  absolutes Maximum

$$A_{\max} = A(10) = -0,025 \cdot 10^3 + 0,25 \cdot 10^2 + 2,5 \cdot 10 + 375 = 400 \text{ m}^2$$

**37.2.3**

$$388 \hat{=} 100 \%$$

$$400 \hat{=} x \%$$

$$\Rightarrow x = \frac{400 \cdot 100}{388} \approx 103,09 \quad \Rightarrow \text{Flächengewinn etwa } 3,1 \%$$

**38.1**

$$V = \frac{1}{2} r^2 \pi h \quad h = 80 - r$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{1}{2} r^2 \pi (80 - r) = 40r^2 \pi - 0,5r^3 \pi$$

Zwei Halbkreise müssen auf die Stahlplatte passen  $\Rightarrow 4r \leq 60 \Rightarrow r \leq 15$

$$\Rightarrow D_V = ]0; 15]$$

**38.2**

$$V'(r) = 80r\pi - 1,5r^2\pi$$

$$80r\pi - 1,5r^2\pi = 0 \Rightarrow r\pi(80 - 1,5r) = 0$$

$$\Rightarrow (r_1 = 0) \notin D_V \quad 80 - 1,5r = 0 \Rightarrow \left(r_2 = \frac{160}{3}\right) \notin D_V$$

 Skizze von  $V'$  :

$$\Rightarrow G_V \text{ sms in } ]0;15] \Rightarrow \text{absolutes Maximum liegt am rechten Rand} \Rightarrow r = 15$$

$$\Rightarrow V_{\max} = V(15) = 40 \cdot 15^2 \cdot \pi - 0,5 \cdot 15^3 \cdot \pi \approx 22973 \text{ cm}^3$$

**39.1**

$$A(r, h) = 2 \cdot 2r \cdot h + 2 \cdot 3r \cdot h + 2 \cdot \frac{1}{2} r^2 \pi + \frac{1}{2} \cdot M_{\text{Zylinder}}$$

$$M_{\text{Zylinder}} = 2r\pi \cdot 3r = 6r^2\pi$$

$$\Rightarrow A(r, h) = 4r \cdot h + 6r \cdot h + r^2\pi + \frac{1}{2} \cdot 6r^2\pi = 10rh + 4r^2\pi$$

$$V(r, h) = 2r \cdot 3r \cdot h + \frac{1}{2} \cdot r^2 \pi \cdot 3r = 6r^2h + 1,5r^3\pi$$

$$1000 = 10rh + 4r^2\pi \Rightarrow h = \frac{1000 - 4r^2\pi}{10r} = \frac{100}{r} - 0,4r\pi$$

$$\Rightarrow V(r) = 6r^2 \left( \frac{100}{r} - 0,4r\pi \right) + 1,5r^3\pi = 600r - 2,4r^3\pi + 1,5r^3\pi = 600r - 0,9r^3\pi$$

**39.2**

$$D_V = [4; 8,5]$$

$$V'(r) = 600 - 2,7r^2\pi$$

$$600 - 2,7r^2\pi = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{600}{2,7\pi} \approx 70,74 \Rightarrow \left(r_1 = -\sqrt{70,74}\right) \quad r_2 = \sqrt{70,74} \approx 8,41$$

 Skizze von  $V'$  :

$$\Rightarrow r = 8,41 \text{ Maximum}$$

 Da  $V$  im Bereich  $[4; 8,5]$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem

 Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow r = 8,41$  abs. Max.

$$V_{\max} = V(8,41) \approx 3364,18 \text{ m}^3$$

40.1

$$V = r^2 \pi h \quad A = r^2 \pi + 2r\pi h = 180\pi \Rightarrow 2r\pi h = 180\pi - r^2 \pi \Rightarrow h = \frac{90}{r} - \frac{1}{2}r$$

$$\Rightarrow V(r) = r^2 \pi \left( \frac{90}{r} - \frac{1}{2}r \right) = -\frac{1}{2}\pi r^3 + 90\pi r$$

$$1) \text{ maximaler Durchmesser: } 20 \text{ m} \Rightarrow \text{Radius } 10 \text{ m} \quad 2) r > 0 \Rightarrow D_V = ]0; 10]$$

40.2

$$V'(r) = -\frac{3}{2}\pi r^2 + 90\pi$$

$$-\frac{3}{2}\pi r^2 + 90\pi = 0 \Rightarrow r^2 = 60 \Rightarrow r_1 = \sqrt{60} \approx 7,75 \quad (r_2 = -\sqrt{60} \approx -7,75) \notin D_V$$

Skizze von  $V'$  :

$$\Rightarrow r = 7,75 \text{ Maximum}$$

Da  $V$  im Bereich  $]0; 10]$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich

keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf  $\Rightarrow r = 7,75$  absolutes Maximum

$$V(7,75) = 1460,08 \text{ m}^3 \quad 360 \cdot 3 = 1080$$

$\Rightarrow$  das Becken reicht für die vorübergehende Haltung von drei Delfinen aus

$$40.3 \quad A_0 = r^2 \pi = 7,75^2 \cdot \pi \approx 188,69 \text{ m}^2$$

41.1

$$V = l \cdot b \cdot h = a^2 \cdot h \quad 2a + h = 45 \Rightarrow h = 45 - 2a$$

$$\Rightarrow V(a) = a^2 \cdot (45 - 2a) = -2a^3 + 45a^2$$

41.2

$$V'(a) = -6a^2 + 90a$$

$$\Rightarrow -6a^2 + 90a = 0 \Rightarrow a(-6a + 90) = 0 \Rightarrow (a_1 = 0) \notin D_V \quad a_2 = 15$$

Skizze von  $V'$  :

$$\Rightarrow a = 15 \text{ Maximum}$$

Da im betrachteten Intervall nur ein Extremum (Maximum) vorliegt, tritt in diesem

Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$$\Rightarrow a = 15 \text{ absolutes Maximum}$$

$$\Rightarrow h = 45 - 2 \cdot 15 = 15$$

$\Rightarrow$  Die Verpackung hat die Form eines Würfels

$$V_{\max} = -23 + 45 \cdot 15^2 = 3375 \text{ cm}^3$$

41.3

$$\text{FACTUS-Druck: } 6000 : 1000 \cdot 0,08 \cdot 5 \cdot 15^2 = 540 \text{ €}$$

$$\text{PappDruck: } 6000 \cdot 0,09 - 600 \cdot 0,09 = 486 \text{ €}$$

⇒ aus wirtschaftlicher Sicht sollte PappDruck gewählt werden;

42.1

$$V = V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Halbkugel}} = r^2 \pi h + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot r^3 \pi$$

$$\Rightarrow V(r) = r^2 \pi \cdot \left( \frac{4}{r} - \frac{3r}{2} \right) + \frac{2}{3} r^3 \pi = 4r\pi - \frac{3}{2} r^3 \pi + \frac{2}{3} r^3 \pi = 4r\pi - \frac{5}{6} r^3 \pi$$

42.2

$$V'(r) = -2,5r^2 \pi + 4\pi$$

$$-2,5r^2 \pi + 4\pi = 0 \Rightarrow 2,5r^2 \pi = 4\pi \Rightarrow r^2 = 1,6$$

$$\Rightarrow (r_1 \approx -1,26) \notin D \quad r_2 \approx 1,26$$

Skizze von  $V'$  :

$$\Rightarrow r = 1,26 \text{ Maximum}$$

Da  $G_v$  im Bereich  $[0,85;1,4]$  nur ein Extremum (Maximum) besitzt,

tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens ein

$$\Rightarrow r = 1,26 \text{ absolutes Maximum}$$

$$V_{\text{max}} = V(1,26) \approx 10,60 \text{ dm}^3$$

43.1

$$(2r)^2 + h^2 = 25^2 \Rightarrow 4r^2 = 625 - h^2 \Rightarrow r^2 = 156,25 - 0,25h^2$$

$$\Rightarrow V(h) = \frac{13}{3} \cdot \pi \cdot (156,25 - 0,25h^2) \cdot h = \frac{13}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot (625h - h^3) = \frac{13}{12} \cdot \pi \cdot (625h - h^3)$$

43.2

$$V'(h) = \frac{13}{12} \cdot \pi \cdot (625 - 3h^2)$$

$$V'(h) = 0 \Rightarrow 625 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{625}{3}$$

$$\Rightarrow (h_1 \approx 14,43) \notin D_V \quad (h_2 \approx -14,43) \notin D_V$$

Skizze von  $V'$  :

$$\Rightarrow G_V \text{ smf in } [15;23] \Rightarrow \text{absolutes Maximum für } h = 15$$

$$\Rightarrow V_{\max} = V(15) = 6500\pi \approx 20420 \text{ cm}^3$$

Für eine Höhe von 15 cm hat das Pflanzgefäß das größte Volumen von  $20420 \text{ cm}^3$ .

$$r^2 = 156,25 - 0,25 \cdot 15^2 = 100 \Rightarrow (r_1 = -10) \quad r_2 = 10$$

$$\Rightarrow \text{Durchmesser: } 2 \cdot R = 2 \cdot 10 = 20 \text{ cm}$$

44.1  $A(x) = 2x \cdot (-0,01x^2 + 100) = -0,02x^3 + 200x$

44.2

$$A'(x) = -0,06x^2 + 200$$

$$-0,06x^2 + 200 = 0 \Rightarrow 0,06x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = \frac{10000}{3}$$

$$\Rightarrow x_1 \approx 57,74 \quad (x_2 \approx -57,74) \notin D_A$$

Skizze von  $A'$  :

$$\Rightarrow x = 57,74 \text{ Maximum}$$

Da in  $D_A$  nur ein Monotoniewechsel vorhanden ist, ist  $x = 57,74$  auch das absolute Maximum

Abmessungen: Breite:  $2 \cdot 57,74 \approx 115 \text{ m}$

$$\text{Tiefe: } -0,01 \cdot 57,74^2 + 100 \approx 67 \text{ m}$$