Änderungsrate und stärkstes Wachstum

Beispiel:

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$ und $D_f = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Stelle mit der stärksten Zunahme der Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen von f.

$f'(x) = -x^2 + 6x - 5$

$-x^2 + 6x - 5 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 5$

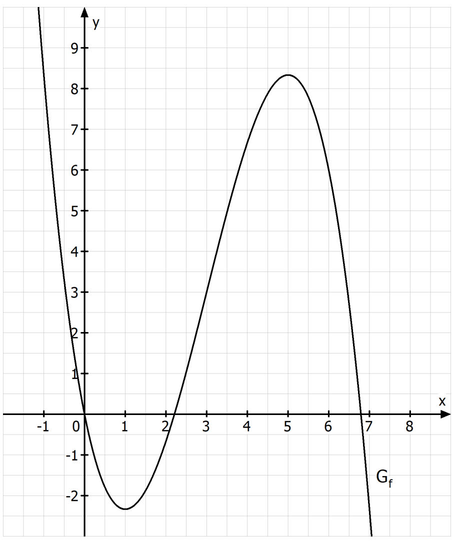
Skizze von f':

$f''(x) = -2x + 6 \qquad -2x + 6 = 0 \quad \Rightarrow x = 3$

$\Rightarrow G_f$ ist im Bereich $\left[1;5\right]$ sms

$\Rightarrow G_{f'}$ hat bei x = 3 das absolute Maximum

$\Rightarrow x = 3$ ist sie Stelle, an der G_f die stärkste Zunahme aufweist



Bei einer ganzrationalen Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ geben die Funktionswerte f´(x) der ersten Ableitung die lokale Änderungsrate der Funktionswerte f(x) an.
Die Stellen lokal stärkster Zunahme bzw. Abnahme der Funktionswerte f(x) ermittelt man mithilfe der Extremstellen der ersten Ableitung. Also kommen hier die Wendestellen von f infrage.
Bei einer Maximalstelle x_0 von f´mit $f'(x_0) > 0$ liegt eine Stelle lokal stärkster Zunahme von f vor.
Bei einer Minimalstelle x_0 von f´mit $f'(x_0) < 0$ liegt eine Stelle lokal stärkster Abnahme von f vor.

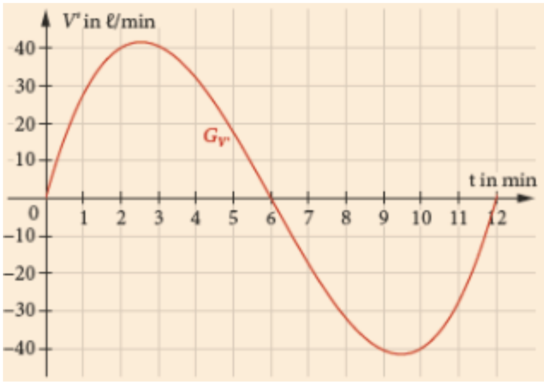
Aufgaben:

1.0 Für den Jahresbericht einer Firma, die T-Shirts vertreibt, soll die Entwicklung der Umsatzzahlen untersucht werden. Der Absatz zwischen Anfang März und Anfang September des vergangenen Jahres lässt sich durch die Funktion A mit der Gleichung $A(t)=\frac{1}{9}t^3-\frac{7}{3}t^2+15t-27$ und der Definitionsmenge $D_A=\left[3;9\right]$ beschreiben. Der Absatz A(t) zum Zeitpunkt t wird in ME angegeben, wobei eine ME für 100000 T-Shirts steht und t für Monate.

1.1 Ermitteln Sie den Zeitraum der Absatzabnahme.

1.2 Bestimmen Sie den Zeitpunkt der stärksten Abnahme.

2.0 Die Funktion V gibt modellhaft das Volumen des Wassers in einem Wasserbehälter in Litern an.
Durch Zufluss und Abfluss ändert sich das Volumen laufend. Das Diagramm zeigt die Änderungsrate V´(t) im Zeitraum von 0 bis 12 Minuten (ohne Hilfsmittel).



2.1 Bestimmen Sie näherungsweise die Koordinaten der Punkte V´(0), V´(1,5), V´(6), V´(9,5) und V´(12).

2.2 Interpretieren Sie den Verlauf der Kurve und die Koordinaten der Punkte im Sachzusammenhang.

2.3 Geben Sie die stärkste Zunahme und die stärkste Abnahme des Volumens an.

Lösungen:

1.1

$$A'(t)=\frac{1}{3}t^2-\frac{14}{3}t+15$$

$$\frac{1}{3}t^2-\frac{14}{3}t+15=0 \quad \Rightarrow t_1=5 \quad t_2=9$$

Skizze von A´:

$\Rightarrow$ Der Absatz fällt von Anfang Mai bis Anfang September

1.2

$$A''(t)=\frac{2}{3}t-\frac{14}{3} \qquad \Rightarrow \frac{2}{3}t-\frac{14}{3}=0 \quad \Rightarrow t=7$$

Skizze von A´:

$\Rightarrow t=7$ absoluter Tiefpunkt von A´ $\Rightarrow t=7$ Stelle mit stärkster Abnahme von $A(t)$

$\Rightarrow$ Anfang Juli ist der Absatzrückgang am größten

2.1 $V'(0)=0$ $V'(1{,}5)=35$ $V'(6)=0$ $V'(9{,}5)=-42$ $V'(12)=0$

2.2 Am Anfang gibt es weder Zu- noch Ablauf. Der Zufluss steigt an bis zum Wert 42 l/min zum Zeitpunkt t = 2,5 min. Der Zufluss nimmt danach ab, bis er zum Zeitpunkt t = 6 min ganz versiegt.
Danach nimmt der Abfluss zu bis zum Zeitpunkt t = 9,5 min, an dem er 42 l/min beträgt.
Dann nimmt der Abfluss ab und zum Zeitpunkt t = 12 min ist er 0 l/min.

2.3 Stärkste Zunahme: 42 l/min Stärkste Abnahme: 42 l/min