Aufgaben zu Integral der e-Funktion

1 Geben Sie zu folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x)=e^{2x}$ b) $f(x)=e^{1-2x}$ c) $f(x)=2\cdot e^{5x+1}$

d) $f(x)=\dfrac{2}{(e^x)^2}$ e) $f(x)=1-e^{2-x}$ f) $f(x)=e^x+e^{-x}$

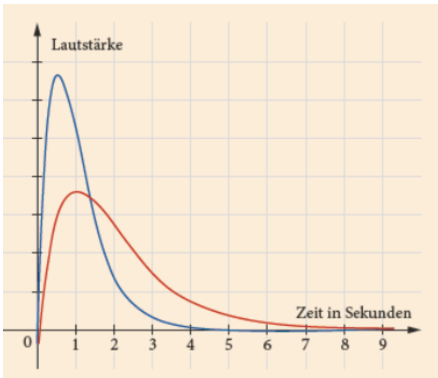
g) $f(x)=x^2+e^{-2x}$ h) $f(x)=\dfrac{2}{e^x}$ i) $f(x)=\dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$

2 Berechnen Sie das bestimmte Integral.

a) $\int_2^1 3e^{2x}\,dx$ b) $\int_2^0 (e^x+e^{3x+1})dx$ c) $\int_2^{\ln 2} (1-e^x)^2\,dx$

3.0 Während eines Poetry-Slams wird die Zustimmung zum Vortrag zweier Kandidaten A und B durch die Lautstärke des Applauses des Publikums bestimmt.

3.1 Die Graphen der Funktionen f mit $f(x)=4x\cdot e^{-x+1}$ und g mit $g(x)=2x\cdot e^{-2x+3}$ sind in folgendem Diagramm dargestellt.
Ordnen Sie die Funktionen f und g den Graphen im Diagramm zu.



3.2 Zeigen Sie: Die Funktion F mit $F(x)=4\cdot\left(-e\cdot x-e\right)\cdot e^{-x}$ und G mit $G(x)=0{,}5\cdot\left(2x+1\right)\cdot e^{-2x+3}$ sind Stammfunktionen der Funktionen f und g.

3.3 Die Beliebtheit der Kandidaten kann durch den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^8 f(x)dx$ bzw. $\int_0^8 g(x)dx$ ausgedrückt werden, wobei ein größerer Wert größere Beliebtheit anzeigt. Zum Kandidat A gehört der Graph der Funktion g und zum Kandidat B gehört der Graph der Funktion f.
Entscheiden Sie, welcher Kandidat bei dem Wettbewerb beliebter ist.

Lösungen

1a) $F(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}+C$

1b) $F(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{1-2x}+C$

1c) $F(x)=\frac{2}{5}\cdot e^{5x+1}+C$

1d) $f(x)=2\cdot e^{-2x} \quad \Rightarrow F(x)=-e^{-2x}+C$

1e) $F(x)=x+e^{2-x}+C$

1f) $F(x)=e^{x}-e^{-x}+C$

1g) $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$

1h) $f(x)=2e^{-x} \quad \Rightarrow F(x)=-2e^{-x}+C$

1i) $f(x)=e^{x}\cdot(1-e^{x})^{-2} \quad \Rightarrow F(x)=(1-e^{x})^{-1}+C$

2a) $\left[\frac{3}{2}e^{2x}\right]_2^1=\frac{3}{2}e^2-\frac{3}{2}e^4\approx-70{,}81$

2b) $\left[e^{x}+\frac{1}{3}e^{3x+1}\right]_2^0=(e^0+\frac{1}{3}e)-(e^2+\frac{1}{3}e^7)\approx 1{,}91-372{,}93\approx-371{,}02$

2c)

$$\int_2^{\ln 2}(1-2e^{x}+e^{2x})dx=\left[x-2e^{x}+\frac{1}{2}e^{2x}\right]_2^{\ln 2}=(\ln 2-2e^{\ln 2}+\frac{1}{2}e^{2\ln 2})-(2-2e^2+\frac{1}{2}e^4)$$

$$=(\ln 2-4+2)-(2-2e^2+\frac{1}{2}e^4)=\ln 2+2e^2-\frac{1}{2}e^4-4\approx-15{,}83$$

3.1

$f(x)=4xe^{-x+1} \quad f'(x)=4e^{-x+1}+4xe^{-x+1}\cdot(-1)=4e^{-x+1}\cdot\left(1-x\right)$

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow 1-x=0 \quad \Rightarrow x=1$

Skizze von f': $4e^{-x+1}$ immer positiv

Skizze von $(1-x)$:

$\Rightarrow x=1$ HOP $\quad$ HOP$\left(1|4\right)$

$g(x)=2xe^{-2x+3} \quad g'(x)=2e^{-2x+3}+2x\cdot e^{-2x+3}\cdot(-2)=2e^{-2x+3}\cdot\left(1-2x\right)$

$g'(x)=0 \quad \Rightarrow 1-2x=0 \quad \Rightarrow x=0{,}5$

Skizze von g': $2e^{-2x+3}$ immer positiv

Skizze von $(1-2x)$:

$\Rightarrow x=0{,}5$ HOP $\quad$ HOP$\left(0{,}5|e^2\right)$

3.2

$F'(x)=4\cdot\left(-e\right)\cdot e^{-x}+4\cdot\left(-e\cdot x-e\right)\cdot e^{-x}\cdot(-1)=4e^{-x}\cdot\left(-e+e\cdot x+e\right)=$

$=4e^{-x}\cdot e\cdot x=4e^{-x+1}=f(x)$

$G'(x)=0{,}5\cdot 2\cdot e^{-2x+3}+0{,}5\cdot\left(2x+1\right)\cdot e^{-2x+3}\cdot(-2)=0{,}5\cdot e^{-2x+3}\cdot\left(2-4x-2\right)=$

$=-2x\cdot e^{-2x+3}=g(x)$

3.3

$$\int_0^8 f(x)dx=\left[4\left(-ex-e\right)\cdot e^{-x+1}\right]_0^8\approx 10{,}84$$

$$\int_0^8 g(x)dx=\left[0{,}5\left(2x+1\right)\cdot e^{-2x+3}\right]_0^8\approx 10{,}04$$

$\Rightarrow$ Zur Kandidatin B gehört der Graph der Funktion f. Sie gewinnt den Poetry-Slam.