Jochen Weber

Bernoulli-Ketten

Beispiele:

1 Eine Urne enthält zehn Kugeln, von denen sechs schwarz sind. Es werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine schwarze bzw. genau zwei schwarze Kugeln gezogen werden.

Baumdiagramm:

Allgemein gilt:

Zieht man aus einer Urne n Kugeln mit Zurücklegen, so gilt für die Anzahl Z der gezogenen Kugeln $P(Z=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$. p ist dabei der Anteil der betrachteten Kugeln.

2.0 Ein Würfel wird viermal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man

2.1 genau zwei Sechser wirft.

2.2 höchstens einen Sechser wirft.

Ein Zufallsexperiment, das nur zwei Ergebnisse hat (Treffer oder Niete), nennt man Bernoulli-Experiment.
Ein Zufallsexperiment, das aus n unabhängigen Durchführungen desselben Bernoulli-Experimentes besteht, heißt Bernoulli-Kette der Länge n.

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Experimenten

Ein Bernoulli-Experiment mit der Wahrscheinlichkeit p für Treffer werden n-mal durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer (k = 0 ;....; n) beträgt dann:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Aufgaben:

1.0 Eine Laplace Münze wird zehnmal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für

1.1 genau fünfmal Wappen

1.2 mindestens einmal Wappen

1.3 mehr als achtmal Wappen

2.0 Eine Maschine stellt Schrauben mit einem Ausschussanteil von 5% her.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter zehn zufällig ausgewählten Schrauben

2.1 keine Ausschussware ist.

2.2 höchstens zwei Schrauben Ausschuss sind.

3 Problem von de Meré:
Bestimmen Sie, ob es wahrscheinlicher ist bei vier Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu würfeln oder bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu würfeln.

4 Ein elektronisches Bauteil enthält 15 Mikrochips, die unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p ordnungsgemäß arbeiten. Ist auch nur ein einziger Chip defekt, so ist das Bauteil bereits funktionsuntüchtig. Bestimmen Sie, wie groß p sein muss, damit das Bauteil mit 95 % Sicherheit arbeitet.

5 Herr Müller muss morgens auf seinem Weg zur Arbeit insgesamt 6 Ampeln passieren. Es soll angenommen werden, dass alle Ampeln unabhängig voneinander mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p grün sind. Ermitteln Sie, wie groß p sein muss, damit Herr Müller mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % nicht anhalten muss.

6 Ein Würfel erweckt den Eindruck, dass er gezinkt ist. Viele Würfe führen zu dem Ergebnis, dass die Wahrscheinlichkeit mindestens eine sechs nach drei Würfen zu erhalten, bei 60 % liegt.
Berechnen Sie, wie hoch für diesen Würfel die Wahrscheinlichkeit ist, eine sechs zu würfeln.

Beispiele:

1

$$\Omega=\left\{sss,ss\bar{s},s\bar{s}s,s\bar{s}\bar{s},\bar{s}ss,\bar{s}s\bar{s},\bar{s}\bar{s}s,\bar{s}\bar{s}\bar{s}\right\}$$

$$A=\left\{ss\bar{s},s\bar{s}s,\bar{s}ss\right\}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}=3\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}=$$

$$3\cdot\left(\frac{6}{10}\right)^2\cdot\frac{4}{10}=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{6}{10}\right)^2\cdot\frac{4}{10}=0{,}432$$

$$B=\left\{s\bar{s}\bar{s},\bar{s}s\bar{s},\bar{s}\bar{s}s\right\}$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}=3\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}=$$

$$3\cdot\frac{6}{10}\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^2=\binom{3}{1}\cdot\frac{6}{10}\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^2=0{,}288$$

2

$$P(A)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\approx 0{,}1157$$

$$P(B)=\binom{4}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4+\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\approx 0{,}4823+0{,}3858\approx 0{,}8681$$

Aufgaben:

1

$$P(X=5)=\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\approx 0{,}2461$$

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+\ldots+P(X=10)=1-P(X=0)=$$

$$1-\binom{10}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\approx 0{,}9990$$

$$P(X>8)=P(X=9)+P(X=10)=\binom{10}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+\binom{10}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\approx 0{,}0098+0{,}00098\approx 0{,}01078$$

2

$$P(X=0)=\binom{10}{0}\cdot(0{,}05)^0\cdot(0{,}95)^{10}\approx 0{,}5987$$

$$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$\binom{10}{0}\cdot(0{,}05)^0\cdot(0{,}95)^{10}+\binom{10}{1}\cdot(0{,}05)^1\cdot(0{,}95)^9+\binom{10}{2}\cdot(0{,}05)^2\cdot(0{,}95)^8\approx$$

$$0{,}5987+0{,}3151+0{,}0746\approx 0{,}9884$$

3

X: Anzahl 6er $\quad n=4 \quad p=\frac{1}{6}$

$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1-P(X=0)$

$1-\binom{4}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4\approx 0{,}5177$

X: Anzahl Doppelsechser $\quad n=24 \quad p=\frac{1}{36}$

$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+...+P(X=24)=1-P(X=0)$

$1-\binom{24}{0}\cdot\left(\frac{1}{36}\right)^0\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\approx 0{,}4914$

4

X: Anzahl der funktionstüchtigen Chips von 15

$n=15$ p unbekannt

$P(X=15)=0{,}95 \Rightarrow \binom{15}{15}\cdot p^{15}\cdot(1-p)^0=0{,}95$

$\Rightarrow p^{15}=0{,}95 \Rightarrow p=\sqrt[15]{0{,}95}\approx 0{,}9966$

5

X: Anzahl der grünen Ampeln von 6

$n=6$ p unbekannt

$P(X=6)=0{,}75 \Rightarrow \binom{6}{6}\cdot p^6\cdot(1-p)^0=0{,}75$

$\Rightarrow p^6=0{,}75 \Rightarrow p=\sqrt[6]{0{,}75}\approx 0{,}9532$

6

P("mindestens eine sechs nach drei Würfen") = 1 - P("keine sechs") =

$1-\binom{3}{0}\cdot p^0\cdot q^3=1-q^3$

$\Rightarrow 1-q^3=0{,}6 \quad \Rightarrow q^3=0{,}4 \quad \Rightarrow q=\sqrt[3]{0{,}4}\approx 0{,}74 \quad \Rightarrow p=0{,}26$

Die Wahrscheinlichkeit mit diesem Würfel eine sechs zu würfeln, beträgt sogar 26 %.