Die Binomialverteilung

Beispiel:

Eine Urne enthält 10 weiße und 20 schwarze Kugeln. Es werden 4 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der schwarzen Kugeln.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

$n = 3 \quad p = \frac{2}{3}$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,01235	0,09877	0,29630	0,39506	0,19753

Definition:

Die Zufallsgröße X, die die Anzahl der Treffer bei einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p angibt, heißt binomialverteilt mit den Parametern n und p.
Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt Binomialverteilung.

Es gilt: $P(X = k) = B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ für k = 0, 1, 2, ...

Bemerkung:

Eine Zufallsvariable X mit dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung nennt man kurz eine B(n;p) verteilte Zufallsgröße.

Erwartungswert und Varianz einer binomial verteilten Zufallsgröße:

$E(X) = n \cdot p$

$Var(X) = n \cdot p \cdot q$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Die summierte Binomialverteilung

Beispiel:

Eine Urne enthält 10 weiße und 20 schwarze Kugeln. Es werden 4 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der schwarzen Kugeln.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei schwarze Kugeln gezogen werden.

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$P(X \leq 2) = B\left(4;\frac{2}{3};0\right) + B\left(4;\frac{2}{3};1\right) + B\left(4;\frac{2}{3};2\right) = 0{,}01235 + 0{,}09877 + 0{,}29630 = 0{,}40742$$

Ist X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und p, so gilt für die Wahrscheinlichkeit höchstens k Treffer zu erzielen

$$P(X \leq k) = F_p^n(k) = B(n;p;0) + B(n;p;1) + ... + B(n;p;k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

Die entsprechende Verteilung wird summierte Binomialverteilung genannt.

Aufgaben:

1.0 Ein Würfel wird sechsmal geworfen.
Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der auftretenden Sechser.

1.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.

1.2 Berechnen Sie den Erwartungswert E(X) und die Varianz Var(X) der Zufallsgröße X.

1.3 Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
$P(X \leq 4)$; $P(X > 2)$; $P(1 < X \leq 4)$; $P(2 \leq X \leq 5)$; $P(X < 3)$

2.0 Begründen Sie, ob die folgenden Behauptungen richtig oder falsch sind.

2.1 $F_p^n(0) = B(n;p;0)$

2.2 $F_p^n(2) = B(n;p;1) + B(n;p;2)$

2.3 $F_p^n(n) = 1$

3.0 Ein Blumenhändler gibt für eine seltene Pflanze eine Keimgarantie von 70 %.
Ein Kunde bestellt 25 Blumenzwiebeln.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der

3.1 alle 25 Blumenzwiebeln keimen.

3.2 mindestens 20 Blumenzwiebeln keimen.

3.3 mehr als 16, aber weniger als 22 Blumenzwiebeln keimen.

Lösungen zu den Aufgaben:

1.1

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,33490	0,40188	0,20094	0,05358	0,00804	0,00064	0,00002

1.2

$$E(X) = n \cdot p = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

$$Var(X) = n \cdot p \cdot q = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 0{,}91$$

1.3

$$P(X \le 4) = 0{,}99934$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - 0{,}93771 = 0{,}06229$$

$$P(1 < X \le 4) = P(X \le 4) - P(X \le 1) = 0{,}99934 - 0{,}73678 = 0{,}26256$$

$$P(2 \le X \le 5) = P(X \le 5) - P(X \le 1) = 0{,}99998 - 0{,}73678 = 0{,}2632$$

$$P(X < 3) = P(X \le 2) = 0{,}93771$$

2.1 Richtig. Die Wahrscheinlichkeit für höchstens null Treffer ist gleich mit der Wahrscheinlichkeit für null Treffer.

2.2 Falsch. Es fehlt B(n;p;0).

2.3 Richtig. Das Ereignis „höchstens n Treffer bei n Versuchen“ ist das sichere Ereignis.

3.1 $P(X = 25) = 0{,}7^{25} = 0{,}00013$

3.2 $P(X \ge 20) = 1 - F_{0,7}^{25}(19) = 0{,}19349$

3.3 $P(16 < X < 22) = F_{0,7}^{25}(21) - F_{0,7}^{25}(16) = 0{,}64369$