Die Integralrechnung

Eine Funktion F, für deren Ableitung F´(x) = f(x) gilt, heißt eine Stammfunktion der Funktion f.

Bemerkung:

Die Menge aller Stammfunktionen von f ist gegeben durch F(x) + C.

Schreibweise:

$\int f(x)dx = F(x) + C$ (unbestimmtes Integral)

Rechenregeln:

1) $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

2) $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

3) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ ("Potenzregel")

Die Potenzregel gilt auch für negative Exponenten mit Ausnahme von n = -1.

4) $\int x^{-2} dx = -1x^{-1} + C$

5) $\int 1 dx = x + C$

6) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

7) $\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$

Aufgaben:

1) $\int(-\frac{1}{3}x^2)dx$

2) $\int(6x^3-15x^2+6x-2)dx$

3) $\int[(3x^2+4x)(2x+1)]dx$

4) $\int(ax^2-3ax+2)dx$

5) $\int(2x+1)^4\,dx$

6) $\int(ax^2-3ax+2)da$

7) $\int(x^2t-3t^2)dt$

<u>Lösungen:</u>

1) $\int(-\frac{1}{3}x^2)dx = -\frac{1}{9}x^3 + C$

2) $\int(6x^3 - 15x^2 + 6x - 2)dx = \frac{3}{2}x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2x + C$

3) $\int[(3x^2 + 4x)(2x+1)]dx = \int(6x^3 + 11x^2 + 4x)dx =$

$= \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 + 2x^2 + C$

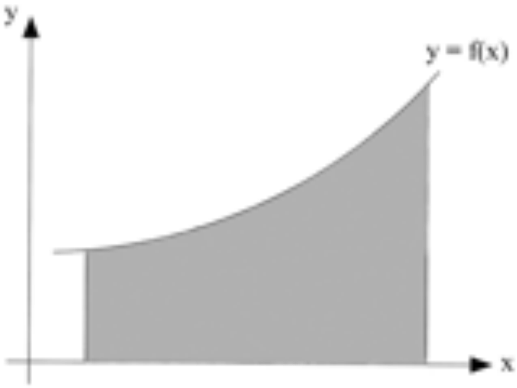
4) $\int(ax^2 - 3ax + 2)dx = \frac{a}{3}x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + 2x + C$

5) $\int(2x+1)^4\,dx = \frac{1}{5}(2x+1)^5 \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + C$

6) $\int(ax^2 - 3ax + 2)da = x^2 \cdot \frac{1}{2}a^2 - 3x \cdot \frac{1}{2}a^2 + 2a + C$

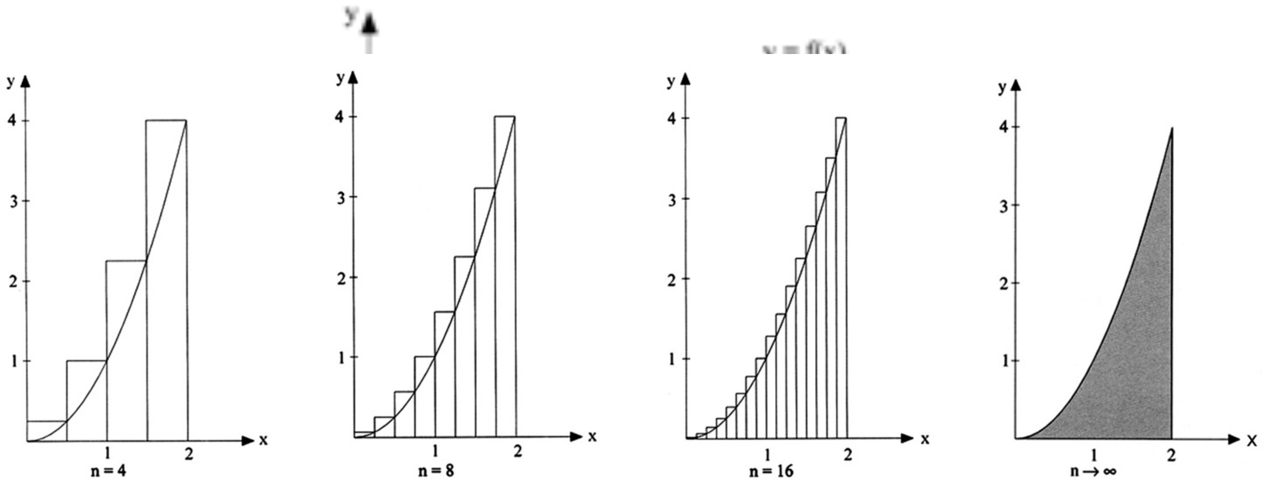
7) $\int(x^2t - 3t^2)dt = x^2 \cdot \frac{1}{2}t^2 - 3 \cdot \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{2}x^2t^2 - t^3 + C$

Berechnung von krummlinig begrenzten Flächen



Lösungsansatz:

Die gesuchte Fläche in Rechtecksflächen zerlegen und dann die Summe der Rechtecksflächen berechnen (Berechnung der „Obersumme“ und „Untersumme“).



Verbesserung: Erhöhung der Anzahl der Rechtecksflächen

Folgerung:

Die „Obersumme“ und die „Untersumme“ der Rechtecksflächen konvergiert gegen einen gemeinsamen Grenzwert, den man auch als bestimmtes Integral bezeichnet.

Schreibweise:

$$\int_a^b f(x)dx$$

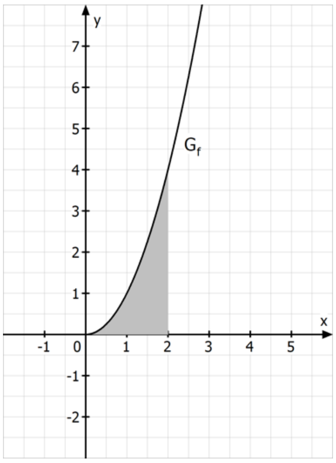
$\int$: Integralzeichen   a: untere Integrationsgrenze   b: obere Integrationsgrenze

f : Integrandenfunktion   x: Integrationsvariable

Anschauliche Bedeutung des bestimmten Integrals:

Das bestimmte Integral stimmt mit der Maßzahl des Flächeninhalts des entsprechend begrenzten Flächenstücks unterhalb des Funktionsgraphen G_f überein, d.h. mit Hilfe des bestimmten Integrals können jetzt auch die Maßzahlen der Flächeninhalte krummlinig begrenzter Flächen berechnet werden.

Beispiel: $f(x) = x^2$



$$A = \int_0^2 x^2 \, dx$$

Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe einer Stammfunktion

Ist F eine (beliebige) Stammfunktion von f, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Beispiel:

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{8}{3}$$

Rechenregeln:

1) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot \int_a^b f(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4) $\int_a^a f(x)dx = 0$

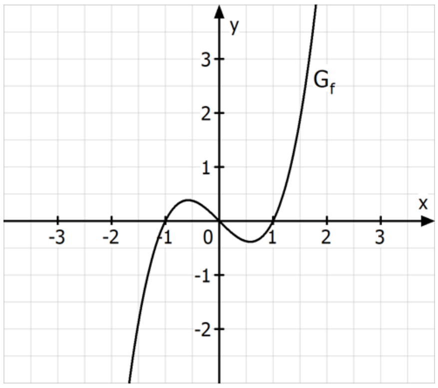
5) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ für $b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b \le c$

Aufgaben:

1)

$$\int_{-1}^{1}(x^3-x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1}=$$
$$=\left(\frac{1}{4}\cdot 1^4-\frac{1}{2}\cdot 1^2\right)-\left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2\right)=-\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=0$$

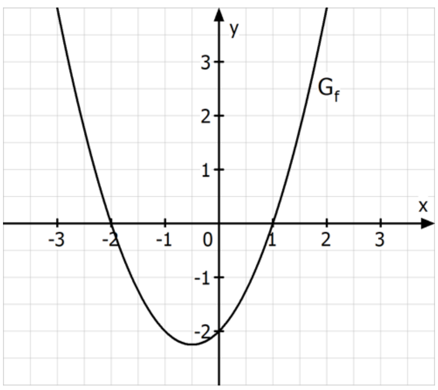
Skizze des Graphen:



2)

$$\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{1}=$$
$$=\left(\frac{1}{3}\cdot 1^3+\frac{1}{2}\cdot 1^2-2\cdot 1\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot(-2)^3+\frac{1}{2}\cdot(-2)^2-2\cdot(-2)\right)=-1\frac{1}{6}-3\frac{1}{3}=-4\frac{1}{2}$$

Skizze des Graphen:

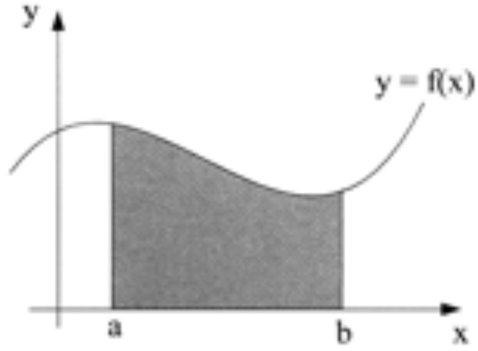


Folgerung:

Der Wert des bestimmten Integrals stellt eine Flächenbilanz dar.

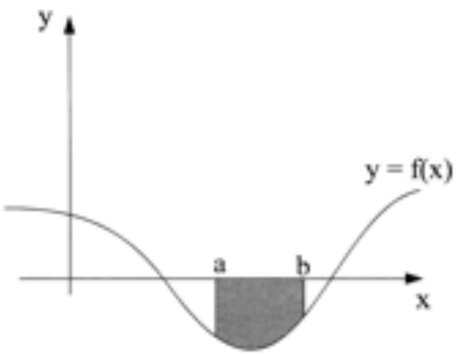
Berechnung der Maßzahl von Flächeninhalten

1) Maßzahl des Flächeninhalts einer Fläche über [a;b] oberhalb der x-Achse:



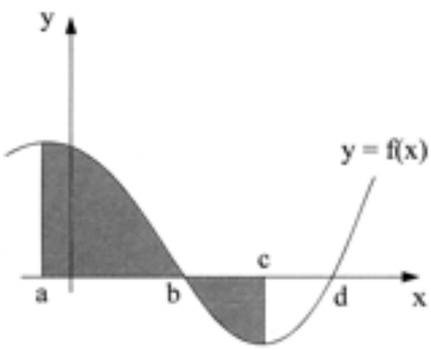
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

2) Maßzahl des Flächeninhalts einer Fläche über [a;b] unterhalb der x-Achse:



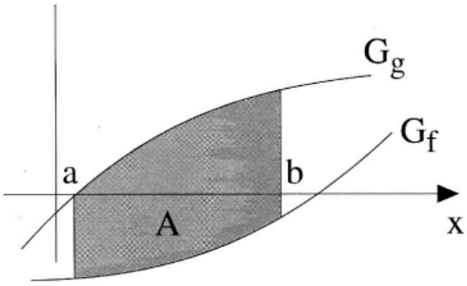
$$A = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

3) Maßzahl des Flächeninhalts einer Fläche über [a;c] oberhalb und unterhalb der x-Achse:

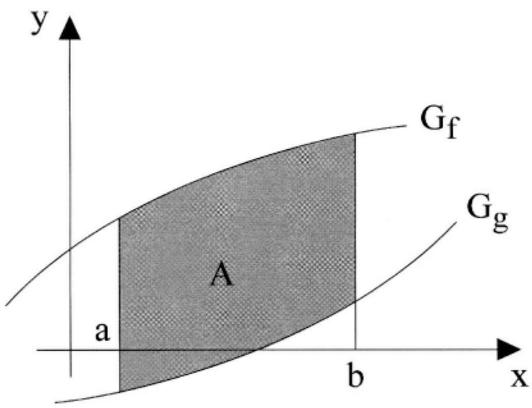


$$A = \int_a^b f(x)dx + \left| \int_b^c f(x)dx \right|$$

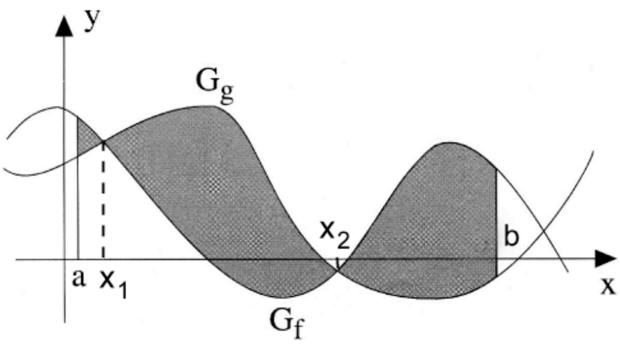
4) Maßzahl des Flächeninhalts von Flächenstücken, die von zwei Graphen begrenzt werden:



$$A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right) dx$$



$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$



$$A = \int_a^{x_1} \left(f(x) - g(x)\right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(g(x) - f(x)\right) dx + \int_{x_2}^{b} \left(f(x) - g(x)\right) dx$$