Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße

Beispiel:

Gegeben ist die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Glücksspielautomaten. Die Zufallsgröße X gibt dabei die Auszahlung in Cent an.
Bestimmen Sie die durchschnittliche Auszahlung des Glücksspielautomaten.

x	0	10	20	100
P(X = x)	$\frac{58}{100}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{1}{100}$

Berechnung der durchschnittlichen Auszahlung:

$$E(X)=\mu=0\cdot\frac{58}{100}+10\cdot\frac{25}{100}+20\cdot\frac{16}{100}+100\cdot\frac{1}{100}=6{,}7$$

Definition:

X sei eine Zufallsgröße, die ihre Werte $x_1,\dots, x_k$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_1),\dots,$ $P(X = x_k)$ annimmt, dann heißt

$$\mu=E(X)=x_1\cdot P(X=x_1)+\dots+x_k\cdot P(X=x_k)=\sum_{i=1}^{k}x_i\cdot P(X=x_i)$$

Erwartungswert von X.

Bemerkung:

Ein Glücksspiel wird als fair bezeichnet, wenn der Erwartungswert für einen Gewinn gleich dem Einsatz ist.

Aufgaben:

1 Zweimaliges Werfen eines Würfels. Die Zufallsgröße X soll die Augensumme sein.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X = x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}=7$$

Jochen Weber

2 Julia und Alex vereinbaren folgende Wette: Julia wirft dreimal nacheinander eine Münze. Erscheint dreimal Wappen oder dreimal Zahl, erhält sie von Alex 4 €. Wenn die Münzen in der Reihenfolge W, W, Z bzw. Z, Z, W fallen, muss Julia 2 € an Alex zahlen. In allen anderen Fällen muss sie nur 1 € abgeben.
Die Zufallsgröße X ist der Gewinn bzw. Verlust von Julia.

x	-2	-1	4
P(X = x)	0,25	0,5	0,25

$$E(X) = -2 \cdot 0{,}25 + (-1) \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}25 = 0$$

3 In einer Firma stehen drei voneinander unabhängig arbeitende Maschinen. Man geht davon aus, dass eine Maschine während eines Tages höchstens einmal ausfällt. Durch den Ausfall der einzelnen Maschinen entsteht ein Verlust von 300 € bei Maschine 1 und 2 und ein Verlust von 600 € bei Maschine 3. Die Zufallsgröße X soll die Verluste durch den Ausfall der Maschinen beschreiben.

x	0	300	600	900	1200
P(X = x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 300 \cdot \frac{2}{8} + 600 \cdot \frac{2}{8} + 900 \cdot \frac{2}{8} + 1200 \cdot \frac{1}{8} = \frac{4800}{8} = 600$$

4 Ein Spieler setzt beim Roulette 1 € auf 1. Dutzend. Gewinnt er, bekommt er 3 € zurück.
Die Zufallsgröße X beschreibt den Gewinn bei einem Spiel.

x	-1	2
P(X = x)	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$

$$E(X) = -1 \cdot \frac{25}{37} + 2 \cdot \frac{12}{37} = -\frac{1}{37}$$

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße ist einer ihrer charakteristischen Werte und gibt ihren „mittleren“ Wert an, sagt jedoch nichts darüber aus, wie stark die Werte der Zufallsgröße um diesen Mittelwert streuen.
Als Maß für die durchschnittliche Abweichung der Werte der Zufallsgröße X um ihren Erwartungswert E(X) führt man deshalb die Varianz Var(X) der Zufallsgröße bzw. ihre Standardabweichung $\sigma(X)$ ein.

<u>Definition:</u>

X sei eine Zufallsgröße, die ihre Werte $x_1, \ldots, x_k$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_1), \ldots, P(X = x_k)$ annimmt und $E(X) = \mu$.

Dann heißt $Var(X) = E((x-\mu)^2) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$ Varianz von X.

<u>Bemerkung:</u>

Als Standardabweichung einer Zufallsgröße X bezeichnet man die Zahl $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$.

<u>Aufgaben:</u>

1 Ein Betrieb produziert auf einer Maschine Drahtstifte, die möglichst genau 100 mm lang sein sollen. Produktionsbedingt kann es jedoch zu Abweichungen kommen. Aufgrund von Kundenreklamationen will man eine Neujustierung der Maschine vornehmen. Um den Erfolg der Justierung zu überprüfen, werden in umfangreichen Stichproben vor und nach der Neujustierung die jeweils auftretenden Längen gemessen.
Die gemessenen Längen werden durch die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen X und Y beschrieben, wobei X die Längen der Drahtstifte in mm vor der Justierung und Y nach der Justierung angibt.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Justierung erfolgreich war.

Länge in mm	96	97	98	99	100	101	102	103
P(X = x)	0,04	0,08	0,12	0,18	0,20	0,13	0,11	0,14

Länge in mm	96	97	98	99	100	101	102	103
P(Y = y)	0	0,04	0,09	0,19	0,41	0,14	0,09	0,04

2.0 Bei einem Glücksspiel gibt es zwei Spielvarianten, die durch die Zufallsgröße X und Y beschrieben werden. Die untenstehenden Tabellen geben die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen an.

X	-2	-1	4
P(X = x)	0,25	0,2	0,25

Y	-2	0	1
P(Y = y)	0,2	0,4	0,4

2.1 Zeigen Sie, dass beide Spiele fair sind.

2.2 Berechnen Sie jeweils die Varianz und die Standardabweichung und interpretieren Sie die Ergebnisse.

3.0 Gegeben sind die Schulaufgabenergebnisse von zwei verschiedenen Klassen.

Noten	1	2	3	4	5	6
Anzahl	2	4	4	9	6	0

Noten	1	2	3	4	5	6
Anzahl	6	3	2	6	2	6

Im Folgenden werden diese Ergebnisse als Zufallsexperiment interpretiert, wobei die Zufallsgröße die jeweils erzielte Note angibt.

3.1 Erstellen Sie für jede Klasse eine zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung.

3.2 Zeigen Sie, dass der Erwartungswert in beiden Klassen gleich ist.

3.3 Berechnen Sie für jede Klasse die Standardabweichung und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.

Einfachere Formel zur Berechnung der Varianz (Verschiebungsformel):

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Beispiel:

Simone, Caroline und Christoph spielen Roulette und setzen jeweils 10 €.
Simone setzt auf alle geraden Zahlen („Pair“) und erhält bei Gewinn den doppelten Einsatz ausgezahlt. Caroline setzt auf die Zahlen von 4 bis 9 („Transversale simple“) bei einer Auszahlung des sechsfachen Einsatzes und Christoph setzt auf die Zahl 11 („Plein“) und erhält im Gewinnfall den
36-fachen Einsatz ausgezahlt.
Jeder der drei Spieler hält sein Setzen für das günstigste. Simone stellt ihre große Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn heraus, Caroline die höhere Auszahlung bei noch guten Gewinnchancen und Christoph die größte Auszahlung.
Beurteilen Sie die Gewinnchancen, indem Sie jeweils die Erwartungswerte und Varianzen der Zufallsgrößen X, Y und Z bestimmen, die den Gewinn bzw. Verlust von Simone, Caroline und Christoph in € angeben.

Simone:

x	-10	10
P(X = x)	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

Caroline:

y	-10	50
P(Y = y)	$\frac{31}{37}$	$\frac{6}{37}$

Christoph:

z	-10	350
P(Z = z)	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

$$E(X) = -10 \cdot \frac{19}{37} + 10 \cdot \frac{18}{37} = -\frac{10}{37} \approx -0{,}27$$

$$E(Y) = -10 \cdot \frac{31}{37} + 50 \cdot \frac{6}{37} = -\frac{10}{37} \approx -0{,}27$$

$$E(Z) = -10 \cdot \frac{36}{37} + 350 \cdot \frac{1}{37} = -\frac{10}{37} \approx -0{,}27$$

$$Var(X) = \left(-10\right)^2 \cdot \frac{19}{37} + \left(10\right)^2 \cdot \frac{18}{37} - \left(-0{,}27\right)^2 = 99{,}9271$$

$$Var(Y) = \left(-10\right)^2 \cdot \frac{31}{37} + \left(50\right)^2 \cdot \frac{6}{37} - \left(-0{,}27\right)^2 = 489{,}12$$

$$Var(Z) = \left(-10\right)^2 \cdot \frac{36}{37} + \left(350\right)^2 \cdot \frac{1}{37} - \left(-0{,}27\right)^2 = 3408{,}04$$

Die Varianz ist in diesem Fall ein Maß für das jeweilige Risiko von Simone, Caroline und Christoph.
Man kann zwar bei hoher Varianz im Einzelfall einen hohen Gewinn einstreichen, wird aber im Durchschnitt sehr oft verlieren.
Wenn alle drei über genügend Kapital verfügen, so wird auf lange Sicht jeder pro Spiel im Schnitt 0,27 € verlieren. Simone wird aber wahrscheinlich einen geruhsameren Abend als Caroline und Christoph verbringen.

Lösungen zu den Aufgaben:

1)

$$E(X)=96\cdot 0{,}04+97\cdot 0{,}08+98\cdot 0{,}12+99\cdot 0{,}18+100\cdot 0{,}20+101\cdot 0{,}13+102\cdot 0{,}11+103\cdot 0{,}14=99{,}95$$

$$\begin{aligned}Var(X)=&\left(96-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}04+\left(97-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}08+\left(98-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}12+\left(99-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}18+\\&\left(100-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}20+\left(101-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}13+\left(102-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}11+\left(103-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}14=3{,}8475\end{aligned}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{3{,}8475}=1{,}96$$

$$E(Y)=96\cdot 0+97\cdot 0{,}04+98\cdot 0{,}09+99\cdot 0{,}19+100\cdot 0{,}41+101\cdot 0{,}14+102\cdot 0{,}09+103\cdot 0{,}04=99{,}95$$

$$\begin{aligned}Var(Y)=&\left(96-99{,}95\right)^2\cdot 0+\left(97-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}04+\left(98-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}09+\left(99-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}19+\\&\left(100-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}41+\left(101-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}14+\left(102-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}09+\left(103-99{,}95\right)^2\cdot 0{,}04=1{,}7675\end{aligned}$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{1{,}7675}=1{,}33$$

2.1

$$E(X)=-2\cdot 0{,}25+(-1)\cdot 0{,}5+4\cdot 0{,}25=0$$
$$E(Y)=-2\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}4+1\cdot 0{,}4=0$$

2.2

$$Var(X)=\left(-2-0\right)^2\cdot 0{,}25+\left(-1-0\right)^2\cdot 0{,}5+\left(4-0\right)^2\cdot 0{,}25=5{,}5\quad\Rightarrow\sigma(X)=\sqrt{5{,}5}=2{,}35$$
$$Var(Y)=\left(-2-0\right)^2\cdot 0{,}2+\left(0-0\right)^2\cdot 0{,}4+\left(1-0\right)^2\cdot 0{,}4=1{,}2\quad\Rightarrow\sigma(Y)=\sqrt{1{,}2}=1{,}095$$

Varianz und Streuung von X sind wesentlich größer und damit ist das Glücksspiel, das durch X beschrieben wird, wesentlich riskanter.

3.1

x	1	2	3	4	5	6
P(X = x)	0,08	0,16	0,16	0,36	0,24	0

y	1	2	3	4	5	6
P(Y = y)	0,24	0,12	0,08	0,24	0,08	0,24

3.2

$$E(X) = 1\cdot 0{,}08 + 2\cdot 0{,}16 + 3\cdot 0{,}16 + 4\cdot 0{,}36 + 5\cdot 0{,}24 + 6\cdot 0 = 3{,}52$$

$$E(Y) = 1\cdot 0{,}24 + 2\cdot 0{,}12 + 3\cdot 0{,}08 + 4\cdot 0{,}24 + 5\cdot 0{,}08 + 6\cdot 0{,}24 = 3{,}52$$

3.3

$$\begin{aligned} Var(X) = {} & (1-3{,}52)^2\cdot 0{,}08 + (2-3{,}52)^2\cdot 0{,}16 + (3-3{,}52)^2\cdot 0{,}16 + (4-3{,}52)^2\cdot 0{,}36 + \\ & (5-3{,}52)^2\cdot 0{,}24 + (6-3{,}52)^2\cdot 0 = 1{,}5296 \quad \Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{1{,}5296} = 1{,}24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Y) = {} & (1-3{,}52)^2\cdot 0{,}24 + (2-3{,}52)^2\cdot 0{,}12 + (3-3{,}52)^2\cdot 0{,}08 + (4-3{,}52)^2\cdot 0{,}24 + \\ & (5-3{,}52)^2\cdot 0{,}08 + (6-3{,}52)^2\cdot 0{,}24 = 3{,}5296 \quad \Rightarrow \sigma(Y) = \sqrt{3{,}5296} = 1{,}88 \end{aligned}$$

Bei der zweiten Klasse ist die Streuung größer, weil es mehr sehr gute, aber auch mehr sehr schlechte Noten gibt.