

Aussagenlogik

1. Aussagen

Beispiel:

Die Adresse der Beruflichen Oberschule Donauwörth lautet: Neudegger Allee 9, 86609 Donauwörth.

Definition:

Unter einer Aussage versteht man einen Satz, von dem man eindeutig entscheiden kann, ob er wahr oder falsch ist.

Aufgaben:

1.0 Entscheiden Sie, ob die folgenden Sätze Aussagen sind und geben Sie gegebenenfalls den Wahrheitswert (wahr, falsch) an.

1.1 Bayern ist ein Bundesland. ☐

1.2 Tirol gehört zu Bayern. ☐

1.3 Sei endlich ruhig ! ☐

1.4 Eine Woche hat sieben Tage. ☐

1.5 Ein Jahr hat 10 Monate. ☐

1.6 Wer heißt Egon ? ☐

1.7 Die Donau fließt durch Ulm. ☐

1.8 Der Mond ist aus Zucker. ☐

2.0 Prüfen Sie, welche folgenden Sätze aus der Mathematik Aussagen sind und geben Sie gegebenenfalls den Wahrheitswert (wahr, falsch) an.

2.1 23 ist eine zweistellige Primzahl. ☐

2.2 Addiere zu 5 die Zahl 9. ☐

2.3 13 ist Teiler von 18. ☐

2.4 Das Produkt $4 \cdot 8$ ist kleiner als 30. ☐

2.5 Ist 50 eine Quadratzahl ? ☐

2.6 2 ist eine gerade Primzahl. ☐

Lösungen:

1.1 wahr	1.2 falsch	1.3 keine Aussage	1.4 wahr
1.5 falsch	1.6 keine Aussage	1.7 wahr	1.8 falsch
2.1 wahr	2.2 keine Aussage	2.3 wahr	2.4 falsch
2.5 keine Aussage	2.6 wahr		

2. Verknüpfung von Aussagen

UND-Aussagen (Konjunktion)

Beispiel:

Ulm liegt in Bayern und an der Donau.

Definition:

Die Verbindung zweier Aussagen A, B zu einer Aussage der Form „A und B“ heißt UND-Aussage oder Konjunktion.

Man schreibt: $A \wedge B$ (A und B bzw. auch A und zugleich B)

Die Aussage $A \wedge B$ ist
wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind
falsch, wenn mindestens eine Teilaussage falsch ist.

Wahrheitstabelle

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Aufgaben:

1.1 Ein Wal ist ein Säugetier und kann schwimmen. ☐

1.2 9 ist eine Quadratzahl und eine Primzahl. ☐

1.3 9 ist eine gerade Zahl und eine Primzahl. ☐

Bemerkung:

Die Gesetze der Aussagenlogik finden Anwendungen in logischen Schaltungen in der Datenverarbeitung. Diese verarbeiten Eingangswerte nach einer bestimmten Vorschrift zu Ausgangswerten.

Lösungen zu den Aufgaben:

- 1.1 Wahr, weil beide Teilaussagen richtig sind.
- 1.2 Falsch, weil die zweite Teilaussage falsch ist.
- 1.3 Falsch, weil beide Teilaussagen falsch sind.

ODER-Aussagen (Disjunktion)

Beispiel:

München liegt an der Isar oder Stefan Raab ist Bundeskanzler.

Definition:

Die Verbindung zweier Aussagen A, B zu einer Aussage der Form „A oder B“ heißt ODER-Aussage oder Disjunktion.

Man schreibt: $A \vee B$ (A oder B bzw. auch A oder auch B)

Die Aussage $A \vee B$ ist
wahr, wenn mindestens eine der Teilaussagen wahr ist.
falsch, wenn beide Teilaussagen falsch sind.

Wahrheitstabelle

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Aufgaben:

1.1 Bayern München wird Deutscher Meister oder die Fußball-WM 2018 fand in Russland statt. 

1.2 4 ist eine Quadratzahl oder 4 besitzt die Zahl 2 als Teiler. 

1.3 9 ist eine Primzahl oder 9 ist eine gerade Zahl. 

Lösungen zu den Aufgaben:

1.1 Wahr, weil die zweite Teilaussage sicher wahr ist.

1.2 Wahr, weil beide Teilaussagen wahr sind.

1.3 Falsch, weil beide Teilaussagen falsch sind.

Negation einer Aussage:Beispiel:

Aussage A: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Aussage $\bar{A}$: Es gibt nicht unendlich viele Primzahlen, d.h. es gibt endlich viele Primzahlen.

Definition:

Die Verneinung einer Aussage A heißt Negation von A.

Man schreibt: $\bar{A}$ (nicht A)

Die Aussage $\bar{A}$ ist
wahr, wenn A falsch ist.
falsch, wenn A wahr ist.

Wahrheitstabelle

A	$\bar{A}$
w	f
f	w

Die Implikation:

Beispiel:

Wenn am Sonntag schönes Wetter ist, dann gehe ich ins Schwimmbad.

Definition:

Die Verbindung zweier Aussagen A, B zu einer Aussage der Form „Wenn A, dann B“ heißt Implikation oder Subjunktion.

Man schreibt $A \Rightarrow B$ (wenn A, dann B bzw. aus A folgt B)

Die Aussage $A \Rightarrow B$ ist nur falsch, wenn die Voraussetzung A wahr und die Folgerung B falsch ist, ansonsten ist sie wahr.

Wahrheitstabelle

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Aufgaben:

- 1.1 Wenn in Berlin Schnee liegt, dann ist Schnee weiß. 
- 1.2 Wenn Berlin in England liegt, dann ist Schnee schwarz. 
- 1.3 Wenn Berlin in Bayern liegt, dann ist Schnee weiß. 
- 1.4 Wenn Berlin in Deutschland liegt, dann ist Schnee schwarz. 

Lösungen zu den Aufgaben:

1.1 Wahr, weil beide Teilaussagen wahr sind.

1.2 Wahr, weil erste Teilaussage falsch ist.

1.3 Wahr, weil erste Teilaussage falsch ist.

1.4 Falsch, weil die erste Teilaussage wahr ist, aber die zweite Teilaussage falsch ist.

Aufgaben zur Verknüpfung von Aussagen

1.0 Geben Sie den Wahrheitswert der Aussagen $A \wedge B$ an. 

1.1 A: Algebra gehört zur Mathematik. B: Die Botanik gehört zur Biologie.

1.2 A: 21 ist eine ungerade Zahl. B: 21 ist keine Primzahl.

1.3 A: 10 ist die Hälfte von 3. B: 10 ist das Dreifache von 3.

1.4 A: Die Sonne erwärmt die Erde. B: Der Mond ist kein Planet.

1.5 A: Die Venus ist kein Fixstern. B: Neptun ist kein Jupitermond.

2.0 Entscheiden Sie, in welcher Bedeutung das Wort „oder“ in den folgenden Sätzen verwendet wird. 

2.1 Das Endspiel um den Titel findet am Freitag oder am Sonntag statt.

2.2 Wie schön wäre es, wenn ich im Toto oder im Lotto gewinnen würde.

2.3 Peter hört gern Jazz oder klassische Musik.

2.4 Petra spielt Tennis oder sieht fern.

2.5 Fabian ist 100m-Läufer oder Weitspringer.

3.0 Geben Sie den Wahrheitswert der Aussagen $A \vee B$ an. 

3.1 A: Die Venus ist der Abendstern. B: Die Venus ist eine Fixstern.

3.2 A: Köln liegt an der Isar. B: München liegt am Rhein.

3.3 A: Der Mond ist ein Satellit. B: Der Mond ist ein Erdbegleiter.

3.4 A: Ein Strauß kann fliegen. B: Ein Strauß ist kein Vogel.

3.5 A: Fußball ist ein Mannschaftssport. B: Ein Fußballteam hat 11 Spieler.

4.0 Geben Sie den Wahrheitswert der Implikation an. 

4.1 Wenn München die Hauptstadt von Bayern ist, dann ist Honig süß.

4.2 Wenn München die Hauptstadt Deutschlands ist, dann ist Honig süß.

4.3 Wenn München die Hauptstadt von Bayern ist, dann ist Honig sauer.

4.4 Wenn München die Hauptstadt Deutschlands ist, dann ist Honig sauer.

Lösungen zu den Aufgaben zur Verknüpfung von Aussagen

1.1 Wahr 1.2 Wahr 1.3 Falsch 1.4 Wahr 1.5 Wahr

2.1 ausschließendes oder (entweder oder)

2.2 einschließendes oder (oder auch)

2.3 einschließendes oder (oder auch)

2.4 ausschließendes oder (entweder oder)

2.5 einschließendes oder (oder auch)

3.1 Wahr (erste Teilaussage trifft zu)

3.2 Falsch (beide Teilaussagen falsch)

3.3 Wahr (zweite Teilaussage trifft zu)

3.4 Falsch (beide Teilaussagen falsch)

3.5 Wahr (beide Teilaussagen richtig)

4.1 Wahr, weil beide Teilaussagen richtig sind.

4.2 Wahr, weil die erste Teilaussage falsch ist.

4.3 Falsch, weil die erste Teilaussage richtig und die zweite Teilaussage falsch ist.

4.4 Wahr, weil beide Teilaussagen falsch sind.

3. Aussageformen

Beispiel:

$A(x)$: x ist eine Quadratzahl kleiner als zehn.

Definition:

Ein Satz mit Leerstellen oder Variablen, der beim Ersetzen der Leerstellen oder Variablen in geeigneter Form in eine Aussage übergeht, heißt Aussageform.

Aufgaben:

1.0 Nehmen Sie für die Leerstellen eine Einsetzung so vor, dass eine wahre Aussage entsteht.
In einigen Fällen sind mehrere Einsetzungen möglich.

1.1 Dillingen liegt an der $\square$. ☐

1.2 $\square$ ist die Hauptstadt von Ungarn. ☐

1.3 $\square$ ist der fünfte Wochentag. ☐

1.4 Die Stadt $\square$ liegt in Bayern. ☐

1.5 $\square$ ist ein Säugetier. ☐

1.6 Die $\square$ fließt durch Deutschland. ☐

2.0 Geben Sie alle Einsetzungen für die Variablen an, welche die Aussageformen in eine wahre Aussage überführen.

2.1 x ist die kleinste natürliche Zahl. ☐

2.2 a und b sind Teiler von 7. ☐

2.3 x ist Teiler einer jeden Zahl. ☐

2.4 Die Zahl n liegt zwischen 6 und 8. ☐

Lösungen zu den Aufgaben:

1.1 Dillingen liegt an der Donau.

1.2 Budapest ist die Hauptstadt von Ungarn.

1.3 Freitag ist der fünfte Wochentag.

1.4 Die Stadt Donauwörth liegt in Bayern.

1.5 Der Hund ist ein Säugetier.

1.6 Die Donau fließt durch Deutschland.

2.1 0 ist die kleinste natürliche Zahl.

2.2 1 und 7 sind Teiler von 7.

2.3 1 ist Teiler einer jeden Zahl.

2.4 Die Zahl 7 liegt zwischen 6 und 8.