

Bruchterme

Beispiel:

Für die Herstellung einer Schülerzeitung macht die Druckerei folgendes Angebot:

900 € Festkosten und 0,50 € pro Heft.

Die Kosten pro Heft (in Euro) kann in Abhängigkeit der Anzahl der gedruckten

Schülerzeitungen mithilfe des Terms $k(x) = 0,50 + \frac{900}{x}$ berechnet werden.

Terme, bei denen Variablen im Nenner vorkommen, heißen Bruchterme.

Bei Bruchtermen ist besonders auf die Definitionsmenge zu achten, weil der Nenner nicht null werden darf.

Definitionsmenge im Beispiel:

Definitionsmenge im mathematischen Sinn:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Sinnvolle Definitionsmenge im Sachzusammenhang:

$$D = \{1; 2; 3; \dots\}$$

Definitionsmenge von Bruchtermen

Aufgaben:

1 $\frac{x}{x+1}$ ☐

2 $\frac{-2x}{5x+25}$ ☐

3 $\frac{-12x+1}{-7x-49}$ ☐

4 $\frac{5}{x \cdot (x-3)}$ ☐

5 $\frac{15x}{(x-5) \cdot (x-2)}$ ☐

6 $\frac{3x+10}{(x+3)^2}$ ☒

7 $\frac{4x+1}{x^2+4x}$ ☒

8 $\frac{x+6}{x^2-9}$ ☒

9 $\frac{x^2-2}{x^2-20x+100}$ ☒

10 $\frac{6x}{36-x^2}$ ☒

Lösungen zu den Aufgaben:

$$1 \quad \frac{x}{x+1} \quad \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$2 \quad \frac{-2x}{5x+25} \quad \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$$

$$3 \quad \frac{-12x+1}{-7x-49} \quad \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$$

$$4 \quad \frac{5}{x \cdot (x-3)} \quad \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$$

$$5 \quad \frac{15x}{(x-5) \cdot (x-2)} \quad \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2; 5\}$$

$$6 \quad \frac{3x+10}{(x+3)^2} \quad \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$7 \quad \frac{4x+1}{x^2+4x} = \frac{4x+1}{x \cdot (x+4)} \quad \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0\}$$

$$8 \quad \frac{x+6}{x^2-9} = \frac{x+6}{(x-3) \cdot (x+3)} \quad \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

$$9 \quad \frac{x^2-2}{x^2-20x+100} = \frac{x^2-2}{(x-10)^2} \quad \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{10\}$$

$$10 \quad \frac{6x}{36-x^2} = \frac{6x}{(6-x) \cdot (6+x)} \quad \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-6; 6\}$$

Kürzen von Bruchtermen

Aufgaben:

$$1 \quad \frac{7x}{x(x-1)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0;1\} \quad \bigcirc$$

$$2 \quad \frac{3x}{2x-x^2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0;2\} \quad \bigcirc$$

Vor dem Kürzen eines Bruchterms müssen der Zähler und der Nenner zuerst faktorisiert werden.

$$3 \quad \frac{5x^2}{10x-25x^2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{2}{5}\right\} \quad \textcircled{\text{X}}$$

$$4 \quad \frac{3x+5}{6x^2+10x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}; 0\right\} \quad \textcircled{\text{X}}$$

$$5 \quad \frac{x^2-6x+9}{3x^2-27} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3;3\} \quad \textcircled{\text{X}}$$

$$6 \quad \frac{(4x^2-x)+(8x-2)}{4x-1} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\} \quad \textcircled{\text{X}}$$

$$7 \quad \frac{7-21x}{15x-5} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} \quad \textcircled{\text{X}}$$

$$8 \quad \frac{10x^2+25x}{4x^2-25} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2,5;2,5\} \quad \textcircled{\text{X}}$$

$$9 \quad \frac{x^2-25}{3x-15} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{5\} \quad \textcircled{\text{X}}$$

Lösungen zu den Aufgaben:

$$1 \quad \frac{7x}{x(x-1)} = \frac{7}{x-1} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$$

$$2 \quad \frac{3x}{2x-x^2} = \frac{3x}{x(2-x)} = \frac{3}{2-x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$$

$$3 \quad \frac{5x^2}{10x-25x^2} = \frac{5x^2}{5x(2-5x)} = \frac{x}{2-5x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{2}{5}\right\}$$

$$4 \quad \frac{3x+5}{6x^2+10x} = \frac{3x+5}{2x \cdot (3x+5)} = \frac{1}{2x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}; 0\right\}$$

$$5 \quad \frac{x^2-6x+9}{3x^2-27} = \frac{(x-3)^2}{3 \cdot (x^2-9)} = \frac{(x-3)^2}{3 \cdot (x-3) \cdot (x+3)} = \frac{x-3}{3 \cdot (x+3)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

$$6 \quad \frac{(4x^2-x)+(8x-2)}{4x-1} = \frac{x(4x-1)+2(4x-1)}{4x-1} = \frac{(4x-1)(x+2)}{4x-1} = x+2 \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

$$7 \quad \frac{7-21x}{15x-5} = \frac{7(1-3x)}{5(3x-1)} = \frac{7(-1)(3x-1)}{5(3x-1)} = -\frac{7}{5} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$8 \quad \frac{10x^2+25x}{4x^2-25} = \frac{5x \cdot (2x+5)}{(2x-5) \cdot (2x+5)} = \frac{5x}{2x-5} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2,5; 2,5\}$$

$$9 \quad \frac{x^2-25}{3x-15} = \frac{(x-5) \cdot (x+5)}{3 \cdot (x-5)} = \frac{x+5}{3} = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen

Beispiele:

$$1 \quad \frac{2}{x} + \frac{5}{x} = \frac{2+5}{x} = \frac{7}{x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$2 \quad \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{1-x}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$3 \quad \frac{1}{2x-6} + \frac{5}{3x-9} - \frac{1}{x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$$

Hauptnenner suchen:

$$2x-6 = 2(x-3)$$

$$3x-9 = 3(x-3)$$

$$x = x$$

$$\Rightarrow \text{HN: } 2 \cdot (x-3) \cdot 3 \cdot x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1 \cdot 3x}{2 \cdot (x-3) \cdot 3 \cdot x} + \frac{5 \cdot 2x}{2 \cdot (x-3) \cdot 3 \cdot x} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (x-3)}{2 \cdot (x-3) \cdot 3 \cdot x} &= \frac{3x + 10x - 6(x-3)}{2 \cdot (x-3) \cdot 3 \cdot x} = \\ &= \frac{3x + 10x - 6x + 18}{2 \cdot (x-3) \cdot 3 \cdot x} = \frac{7x + 18}{2 \cdot (x-3) \cdot 3 \cdot x} \end{aligned}$$

Bruchterme mit gleichem Nenner werden addiert (subtrahiert), indem man die Zähler addiert (subtrahiert) und den Nenner beibehält.

$$\frac{Z_1}{N} + \frac{Z_2}{N} = \frac{Z_1 + Z_2}{N} \quad \frac{Z_1}{N} - \frac{Z_2}{N} = \frac{Z_1 - Z_2}{N}$$

Haben Bruchterme verschiedene Nenner, so bringt man sie vor dem Addieren (Subtrahieren) auf den Hauptnenner.

Aufgaben:

1 $\frac{1}{2x} - \frac{1}{6x}$ ☐

2 $\frac{2}{2x-1} - \frac{-2x+1}{2x-1}$ ☐

3 $\frac{4}{x^2-25} - \frac{3}{x+5}$ ☐

4 $\frac{4}{x-2} - \frac{7}{x^2-2x}$ ☐

5 $\frac{x}{x-4} + \frac{1}{x+4}$ ☐

6 $\frac{5x+3}{x^2-9} - \frac{20}{4x-12}$ ☒

7 $x + \frac{2x+1}{x+1}$ ☒

8 $\frac{x}{2-x} + \frac{x}{x-2}$ ☒

9 $\frac{25-x}{12-3x^2} - \frac{1}{x^3-4x} + \frac{x-2}{3x^2}$ ☒

10 $\frac{x+4}{x-4} - \frac{x-4}{x+4} + \frac{64}{x^2-16}$ ☒

11 $\frac{3x+5}{15x-25} - \frac{12x}{9x^2-25} - \frac{3x-5}{15x+25}$ ☒

Lösungen zu den Aufgaben:

$$1 \quad \frac{1}{2x} - \frac{1}{6x} \quad \text{HN: } 6x$$

$$\frac{3}{6x} - \frac{1}{6x} = \frac{2}{6x} = \frac{1}{3x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$2 \quad \frac{2}{2x-1} - \frac{-2x+1}{2x-1} = \frac{2-(-2x+1)}{2x-1} = \frac{2+2x-1}{2x-1} = \frac{2x+1}{2x-1} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$3 \quad \frac{4}{x^2-25} - \frac{3}{x+5} \quad \text{HN: } (x-5) \cdot (x+5)$$

$$\frac{4-3 \cdot (x-5)}{(x-5) \cdot (x+5)} = \frac{19-3x}{x^2-25} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$$

$$4 \quad \frac{4}{x-2} - \frac{7}{x^2-2x} \quad \text{HN: } x \cdot (x-2)$$

$$\frac{4x-7}{x \cdot (x-2)} = \frac{4x-7}{x^2-2x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$$

$$5 \quad \frac{x}{x-4} + \frac{1}{x+4} \quad \text{HN: } (x-4)(x+4)$$

$$\frac{x \cdot (x+4)}{(x-4)(x+4)} + \frac{x-4}{(x-4)(x+4)} = \frac{x^2+4x+x-4}{(x-4)(x+4)} = \frac{x^2+5x-4}{(x-4)(x+4)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$$

$$6 \quad \frac{5x+3}{x^2-9} - \frac{20}{4x-12} \quad \text{HN: } 4 \cdot (x-3) \cdot (x+3)$$

$$\frac{(5x+3) \cdot 4 - 20 \cdot (x+3)}{4 \cdot (x-3) \cdot (x+3)} = \frac{20x+12-20x-60}{4 \cdot (x-3) \cdot (x+3)} = \frac{-48}{4 \cdot (x-3) \cdot (x+3)} =$$

$$\frac{-12}{(x-3) \cdot (x+3)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

$$7 \quad x + \frac{2x+1}{x+1} = \frac{x \cdot (x+1)}{x+1} + \frac{2x+1}{x+1} = \frac{x^2+x+2x+1}{x+1} = \frac{x^2+3x+1}{x+1} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$8 \quad \frac{x}{2-x} + \frac{x}{x-2} \quad \text{HN: } x-2$$

$$\frac{-x}{x-2} + \frac{x}{x-2} = 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$9 \quad \frac{25-x}{12-3x^2} - \frac{1}{x^3-4x} + \frac{x-2}{3x^2} \quad \text{HN: } -3x^2(x-2)(x+2)$$

$$\frac{(25-x) \cdot x^2}{-3x^2(x-2)(x+2)} - \frac{-3x}{-3x^2(x-2)(x+2)} + \frac{(x-2)(-1)(x-2)(x+2)}{-3x^2(x-2)(x+2)} =$$

$$\frac{25x^2 - x^3 + 3x - (x-2)(x^2-4)}{-3x^2(x-2)(x+2)} = \frac{25x^2 - x^3 + 3x - (x^3 - 4x - 2x^2 + 8)}{-3x^2(x-2)(x+2)} =$$

$$\frac{25x^2 - x^3 + 3x - x^3 + 4x + 2x^2 - 8}{-3x^2(x-2)(x+2)} = \frac{-2x^3 + 27x^2 + 7x - 8}{-3x^2(x-2)(x+2)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$$

10 $\frac{x+4}{x-4} - \frac{x-4}{x+4} + \frac{64}{x^2-16}$ HN: x^2-16

$$\frac{(x+4)(x+4)}{x^2-16} - \frac{(x-4)(x-4)}{x^2-16} + \frac{64}{x^2-16} = \frac{x^2+8x+16-(x^2-8x+16)+64}{x^2-16} =$$

$$\frac{16x+64}{x^2-16} = \frac{16(x+4)}{x^2-16} = \frac{16}{x-4} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$$

11 $\frac{3x+5}{15x-25} - \frac{12x}{9x^2-25} - \frac{3x-5}{15x+25}$ HN: $5(3x-5)(3x+5)$

$$\frac{(3x+5)(3x+5)}{5(3x-5)(3x+5)} - \frac{12x \cdot 5}{5(3x-5)(3x+5)} - \frac{(3x-5)(3x-5)}{5(3x-5)(3x+5)} =$$

$$\frac{9x^2+30x+25-60x-(9x^2-30x+25)}{5(3x-5)(3x+5)} = 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right\}$$

Multiplizieren und Dividieren von Bruchtermen

Beispiele:

$$1 \quad \frac{4a^2}{3b^2} \cdot \frac{15b}{16a} = \frac{4a^2 \cdot 15b}{3b^2 \cdot 16a} = \frac{5a}{4b} \quad D: a \neq 0; b \neq 0$$

$$2 \quad \frac{5x^2 + 5yx}{x^2 - y^2} \cdot (4x - 4y) = \frac{(5x^2 + 5yx) \cdot (4x - 4y)}{x^2 - y^2} =$$

$$\frac{5x(x+y) \cdot 4 \cdot (x-y)}{x^2 - y^2} = 20x \quad D: x \neq y; x \neq -y$$

Bruchterme werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert.

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{N_1 \cdot N_2}$$

Bemerkungen:

1. Vor dem Ausmultiplizieren kürzen, wenn möglich.
Dazu müssen Zähler und Nenner zuerst faktorisiert werden.
2. Definitionsmenge beachten.

$$3 \quad \frac{4}{x^4} : \frac{8}{x^2} = \frac{4}{x^4} \cdot \frac{x^2}{8} = \frac{1}{2x^2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$4 \quad \frac{2x+2}{x+2} : \frac{4+4x}{4-x^2} = \frac{2(x+1)}{x+2} \cdot \frac{(2-x)(2+x)}{4(1+x)} = \frac{2-x}{2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 2\}$$

Durch einen Bruchterm wird dividiert, indem man mit seinem Kehrruch multipliziert.

$$\frac{Z_1}{N_1} : \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{N_2}{Z_2} = \frac{Z_1 \cdot N_2}{N_1 \cdot Z_2}$$

Aufgaben:

1 $\frac{2x^2}{15y} \cdot \frac{25y^2}{4x^3}$ ☐

2 $\frac{23x}{x^3} : \frac{46}{x^2}$ ☐

3 $\frac{15a}{b+c} \cdot \frac{4(b+c)}{45a^2}$ ☐

4 $\frac{2-x}{2y} : \frac{2y}{x-2}$ ☐

5 $\frac{5a}{14(a+b)} \cdot \frac{7(a+b)}{10b}$ ☐

6 $\frac{4x-3y}{x-2y} : \frac{6y-8x}{y-2x}$ ☒

7 $\frac{x+y}{2x} : [2(x+y)]$ ☒

8 $\frac{6(u-v)}{25uv} : \frac{8(v-u)}{15uv}$ ☒

9 $\frac{95m^2+19mn}{25m^2-n^2} \cdot \frac{(5m-n)^2}{13mn}$ ☒

10 $\frac{a^2-b^2}{x(x^2-2xy+y^2)} : \frac{a-b}{xy-y^2}$ ☒

11 $\frac{3x^2-27}{6x+12} : \frac{x^2-6x+9}{x^2+4x+4}$ ☒

12 $(4x^2+4x+1) \cdot \frac{x^2-2x^3}{4x^2+2x}$ ☒

13 $\frac{x^2-y^2}{5x} : \frac{x-y}{x+y}$ ☒

14 $\frac{3ab-b^2}{a^2-2ab+b^2} : \frac{b}{a-b}$ ☒

15 $\frac{a^2-b^2}{9-b^2} : \frac{a^2-2ab+b^2}{9+6b+b^2}$ ☒

Lösungen zu den Aufgaben:

$$1 \quad \frac{2x^2}{15y} \cdot \frac{25y^2}{4x^3} = \frac{5y}{6x} \quad D: x \neq 0; y \neq 0$$

$$2 \quad \frac{23x}{x^3} : \frac{46}{x^2} = \frac{23}{x^2} \cdot \frac{x^2}{46} = \frac{1}{2} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$3 \quad \frac{15a}{b+c} \cdot \frac{4(b+c)}{45a^2} = \frac{4}{3a} \quad D: b \neq -c; a \neq 0$$

$$4 \quad \frac{2-x}{2y} : \frac{2y}{x-2} = \frac{2-x}{2y} \cdot \frac{x-2}{2y} = \frac{-x^2+4x-4}{4y^2} \quad D: y \neq 0; x \neq 2$$

$$5 \quad \frac{5a}{14(a+b)} \cdot \frac{7(a+b)}{10b} = \frac{a}{4b} \quad D: a \neq -b; b \neq 0$$

$$6 \quad \frac{4x-3y}{x-2y} : \frac{6y-8x}{y-2x} = \frac{4x-3y}{x-2y} \cdot \frac{y-2x}{2(3y-4x)} = \frac{-y+2x}{2(x-2y)} \quad D: x \neq 2y; y \neq 2x; 3y \neq 4x$$

$$7 \quad \frac{x+y}{2x} : [2(x+y)] = \frac{x+y}{2x} \cdot \frac{1}{2(x+y)} = \frac{1}{4x} \quad D: x \neq 0; x \neq -y$$

$$8 \quad \frac{6(u-v)}{25uv} : \frac{8(v-u)}{15uv} = \frac{6(u-v)}{25uv} \cdot \frac{15uv}{8 \cdot (-1) \cdot (u-v)} = -\frac{9}{20} \quad D: u \neq 0; v \neq 0; u \neq v$$

$$9 \quad \frac{95m^2+19mn}{25m^2-n^2} \cdot \frac{(5m-n)^2}{13mn} = \frac{19m(5m+n)(5m-n)^2}{(5m-n)(5m+n) \cdot 13mn} = \frac{19(5m-n)}{13n}$$

$$D: m \neq 0; n \neq 0; n \neq 5m; n \neq -5m$$

$$10 \quad \frac{a^2-b^2}{x(x^2-2xy+y^2)} : \frac{a-b}{xy-y^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{x(x-y)^2} \cdot \frac{y(x-y)}{a-b} = \frac{y(a+b)}{x(x-y)}$$

$$D: x \neq 0; x \neq y; a \neq b; y \neq 0$$

$$11 \quad \frac{3x^2-27}{6x+12} : \frac{x^2-6x+9}{x^2+4x+4} = \frac{3(x-3)(x+3)}{6(x+2)} \cdot \frac{(x+2)^2}{(x-3)^2} = \frac{(x+3)(x+2)}{2(x-3)}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$$

$$12 \quad (4x^2+4x+1) \cdot \frac{x^2-2x^3}{4x^2+2x} = \frac{(2x+1)^2 \cdot x^2 \cdot (1-2x)}{2x \cdot (2x+1)} = \frac{(2x+1) \cdot x \cdot (1-2x)}{2}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}; 0 \right\}$$

$$13 \quad \frac{x^2-y^2}{5x} : \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{5x} \cdot \frac{x+y}{x-y} = \frac{(x+y)^2}{5x} \quad D: x \neq 0; x \neq -y$$

$$14 \quad \frac{3ab-b^2}{a^2-2ab+b^2} : \frac{b}{a-b} = \frac{b(3a-b)}{(a-b)^2} \cdot \frac{a-b}{b} = \frac{3a-b}{a-b} \quad D: a \neq b; b \neq 0$$

$$15 \quad \frac{a^2-b^2}{9-b^2} : \frac{a^2-2ab+b^2}{9+6b+b^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{(3-b)(3+b)} \cdot \frac{(3+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{(a+b)(3+b)}{(3-b)(a-b)}$$

$$D: b \neq 3; b \neq -3; a \neq b$$

Zusammengesetzte Bruchterme

Aufgaben:

$$1 \left(\frac{1-x^2}{1-x} - 1 \right) : \left(2x - x \cdot \frac{1}{1-x} \right) = \left(\frac{(1-x)(1+x)}{1-x} - 1 \right) : \left(\frac{2x(1-x)}{1-x} - \frac{x}{1-x} \right) =$$

$$x : \left(\frac{2x-2x^2-x}{1-x} \right) = x : \left(\frac{x-2x^2}{1-x} \right) = x \cdot \frac{1-x}{x(1-2x)} = \frac{1-x}{1-2x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ 0; \frac{1}{2}; 1 \right\}$$

$$2 \left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} \right) : \frac{x^3 - y^3}{x} = \left(\frac{x^3 - y^3}{xy} \right) \cdot \frac{x}{x^3 - y^3} = \frac{1}{y} \quad D: y \neq 0; x \neq 0; x^3 \neq y^3$$

$$3 \frac{x^2}{4x^2 - 4x} \cdot \frac{2x+2}{x^2} - \frac{x^2+2x}{3x^2-3} \cdot \frac{x+1}{x} =$$

$$\frac{x^2}{4x(x-1)} \cdot \frac{2(x+1)}{x^2} - \frac{x(x+2)}{3(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x} =$$

$$\frac{x+1}{2x(x-1)} - \frac{x+2}{3(x-1)} \quad \text{HN: } 6x(x-1)$$

$$\frac{(x+1) \cdot 3}{6x(x-1)} - \frac{(x+2) \cdot 2x}{6x(x-1)} = \frac{3x+3-2x^2-4x}{6x(x-1)} = \frac{-2x^2-x+3}{6x(x-1)}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$$

$$4 \left(\frac{2x-1}{2xy} - \frac{y^3+y^2}{y^3} + 1 \right) \cdot \frac{6x}{y} = \left(\frac{2x-1}{2xy} - 1 - \frac{1}{y} + 1 \right) \cdot \frac{6x}{y} = \left(\frac{2x-1}{2xy} - \frac{1}{y} \right) \cdot \frac{6x}{y} =$$

$$\left(\frac{2x-1}{2xy} - \frac{2x}{2xy} \right) \cdot \frac{6x}{y} = \frac{-1}{2xy} \cdot \frac{6x}{y} = \frac{-3}{y^2} \quad D: x \neq 0; y \neq 0$$

$$5 \left(a - \frac{b^2}{a} \right) \cdot \frac{2ab}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{a} \cdot \frac{2ab}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)}{a} \cdot \frac{2ab}{a-b} = 2b(a+b)$$

$$D: a \neq 0; a \neq b$$

$$6 \frac{x^2-y^2}{xy} \cdot \frac{x^2+xz}{(x+y)^2} - \frac{x+z}{y} = \frac{(x-y)(x+y)}{xy} \cdot \frac{x(x+z)}{(x+y)^2} - \frac{x+z}{y} =$$

$$\frac{(x-y)(x+z)}{y(x+y)} - \frac{x+z}{y} = \frac{(x-y)(x+z)}{y(x+y)} - \frac{(x+z)(x+y)}{y(x+y)} = \frac{(x+z)[(x-y)-(x+y)]}{y(x+y)} =$$

$$\frac{(x+z)(-2y)}{y(x+y)} = \frac{-2(x+z)}{x+y} \quad D: x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y$$