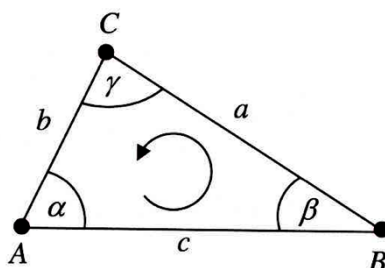


Dreieckslehre

1. Winkel beim Dreieck

Bezeichnungen am Dreieck:

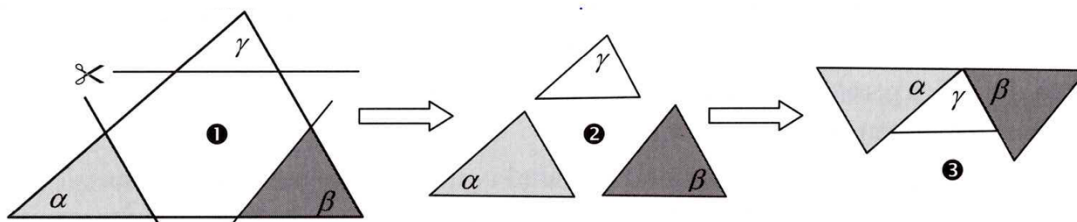
Verbindet man drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so erhält man ein Dreieck.



Die Eckpunkte des Dreiecks werden mit den Punkten A, B und C bezeichnet, die Seiten des Dreiecks sind a, b und c, wobei die Seite a dem Punkt A, die Seite b dem Punkt B und die Seite c dem Punkt C gegenüberliegt.

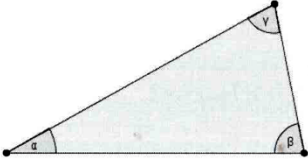
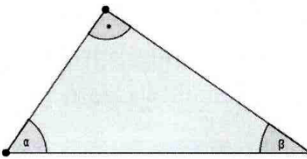
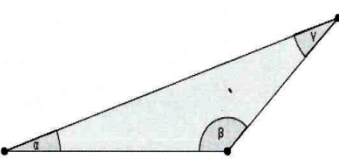
Der Winkel beim Punkt A wird mit α , beim Punkt B mit β und beim Punkt C mit γ bezeichnet.

Innenwinkelsumme:



Die Innenwinkelsumme beträgt in jedem Dreieck 180° .

Dreiecksarten:

<i>spitzwinkliges Dreieck</i>	<i>rechtwinkliges Dreieck</i>	<i>stumpfwinkliges Dreieck</i>
Alle drei Winkel sind kleiner als 90° (alle spitze Winkel).	Es gibt einen Winkel mit dem Maß 90° (γ = rechter Winkel).	Einer der drei Winkel hat ein Maß größer als 90° (β = stumpfer Winkel).
		

Aufgaben:

1.0 Berechnen Sie den fehlenden Winkel des jeweiligen Dreiecks. ☐

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
α	70°	90°		103°		85°
β	40°		45°	27°	38°	60°
γ		30°	60°		77°	

2.0 Nehmen Sie zu den folgenden Aussagen Stellung.

2.1 Der größte Winkel eines Dreiecks muss mindestens 30° groß sein. ☐

2.2 Es gibt Dreiecke mit zwei stumpfen Winkeln. ☐

2.3 Ermitteln Sie, wie groß der kleinste Winkel in einem Dreieck höchstens ist. ☒

Lösungen zu den Aufgaben:

1

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
α	70°	90°	90°	103°	65°	85°
β	40°	60°	45°	27°	38°	60°
γ	70°	30°	60°	50°	77°	35°

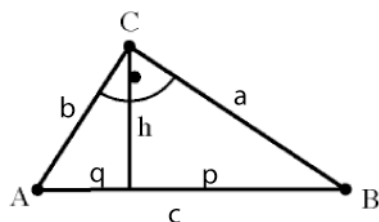
2.1 Falsch. Der größte Winkel muss mindestens ein Maß von 60 ° haben.

2.2 Falsch. Zwei stumpfe Winkel haben zusammen schon ein Winkelmaß größer als 180°.

2.3 Der kleinste Winkel kann höchstens das Maß 60° haben.

2. Besondere Dreiecke

Das rechtwinklige Dreieck:



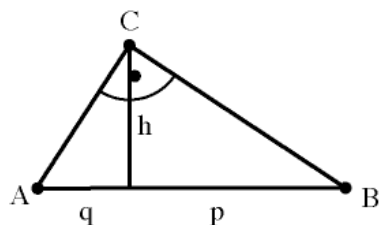
c Hypotenuse
a, b Katheten
p, q Hypotenusenabschnitte

In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, Hypotenuse.
Die anderen Seiten heißen Katheten.

Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck:

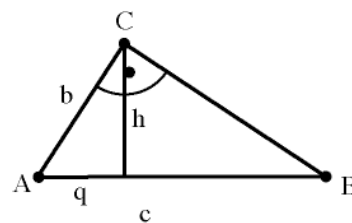
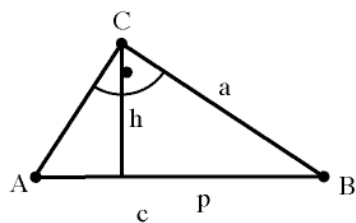
a) $a^2 + b^2 = c^2$ (Satz des Pythagoras)

b) $h^2 = p \cdot q$ (Höhensatz)

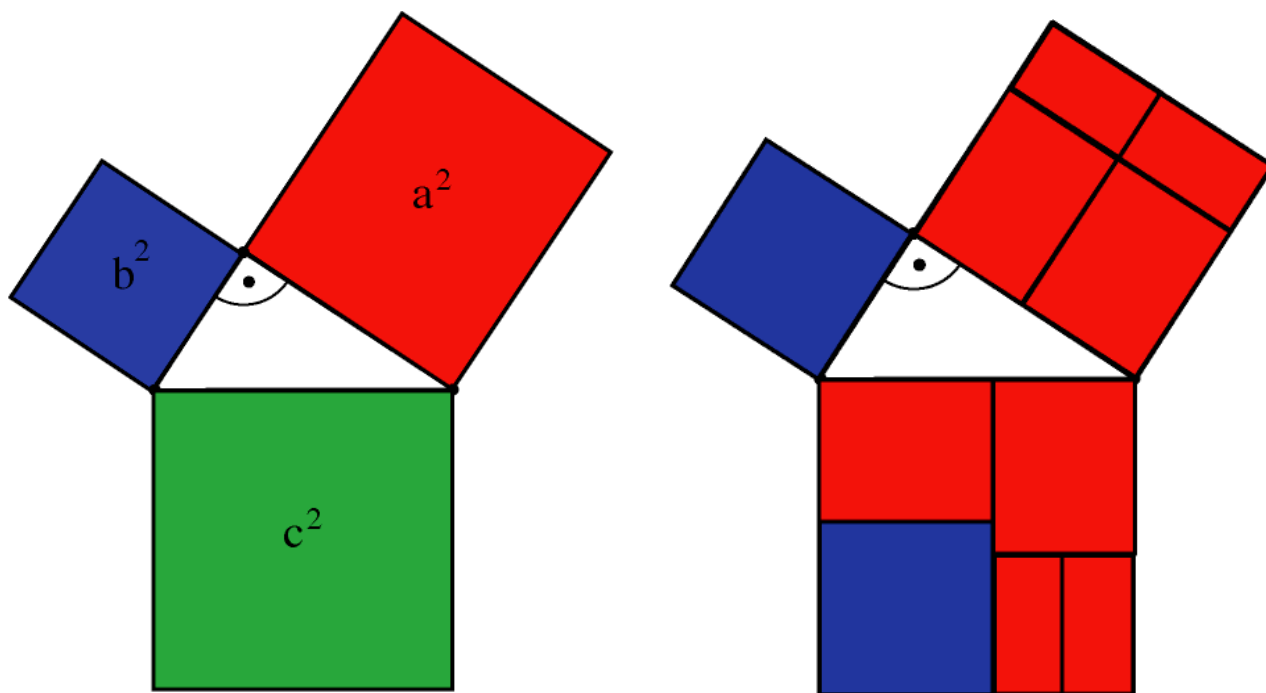


c) $a^2 = c \cdot p$

$b^2 = c \cdot q$



Beweis des Satzes von Pythagoras:



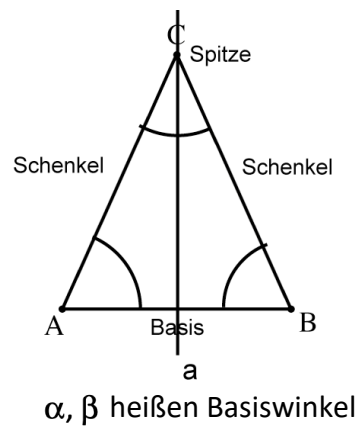
Ein Dreieck, in dem das Quadrat einer Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen ist, ist rechtwinklig.

Das gleichschenklige Dreieck:

Beispiel:



Bezeichnungen am gleichschenkligen Dreieck:



Eigenschaften eines gleichschenkligen Dreiecks:

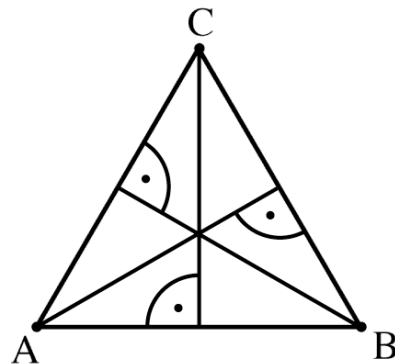
1. Die Schenkel sind gleich lang: $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$.
2. Das Dreieck ist achsensymmetrisch.
3. Die Basiswinkel sind gleich groß: $\alpha = \beta$.
4. Die Symmetrieachse a halbiert die Basis $\overline{AB}$ senkrecht.
5. Die Symmetrieachse a halbiert den Winkel γ an der Spitze.

Sonderfall:

Wenn der Winkel an der Spitze ein rechter Winkel ist, dann nennt man das Dreieck ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck, bei dem dann die Basiswinkel das Maß 45° haben.

Das gleichseitige Dreieck:

Ein Dreieck, bei dem alle Seiten gleich lang sind, nennt man ein gleichseitiges Dreieck.



Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks:

1. Alle Winkel sind gleich groß ($\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$).
2. Ein gleichseitiges Dreieck ist bezüglich der Mittelsenkrechten jeder Seite achsensymmetrisch.

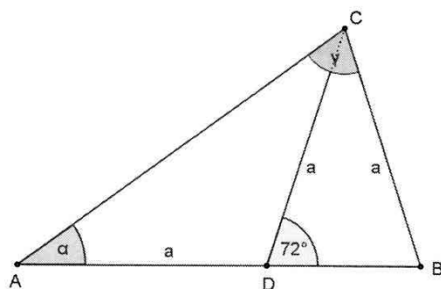
Aufgaben:

1.0 In einem gleichschenkligen Dreieck mit den Basiswinkeln α und β ist das Maß eines Innenwinkels gegeben.

Bestimmen Sie die Maße der beiden anderen Innenwinkel. ☐

	1.1	1.2	1.3
α	57°		
β		27°	
γ			96°

2 Bestimmen Sie in folgender Figur die Maße der Winkel α und γ . ☒



3.0 Beurteilen Sie, ob es Dreiecke mit den angegebenen Winkeln gibt. ☐

3.1 Alle Winkel sind kleiner als 60° .

3.2 Alle Winkel sind größer als 60° .

3.3 Alle Winkel sind gleich 60° .

4.0 Geben Sie an, um welches besondere Dreieck es sich jeweils handelt. ☒

4.1 $\beta = \gamma = 50^\circ$

4.2 $\alpha = \gamma = 60^\circ$

4.3 $\alpha + \beta = 90^\circ$

4.4 $\beta = \gamma = 45^\circ$

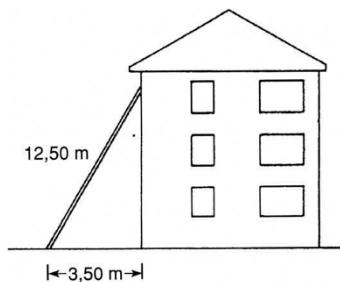
4.5 $\alpha = 57^\circ$ und $\beta = 66^\circ$

4.6 $a = c$ und $\beta = 60^\circ$

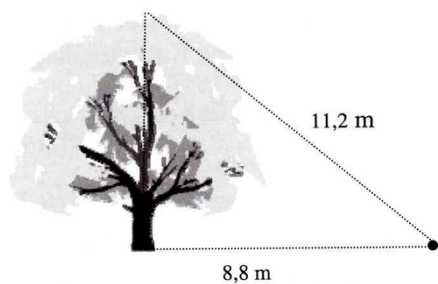
5.0 Berechnen Sie die fehlende Seitenlänge des rechtwinkligen Dreiecks ABC, wenn der rechte Winkel bei C liegt. ☐

	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
a	4 cm	5 m		4 dm		
b	3 cm		7 cm	5 dm	6 cm	10 m
c		13 m	25 cm		10 cm	20 m

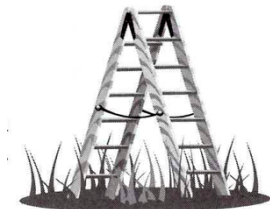
- 6 Eine 12,50 m lange Aluleiter steht vor einer Hauswand am Boden 3,50 m entfernt. Bestimmen Sie, wie hoch die Leiter hinauf reicht. ○



- 7 Bestimmen Sie mithilfe folgender Abbildung, wie hoch der Baum ist. ○



- 8 Die Füße einer Stehleiter stehen 2,20 m auseinander. Bestimmen Sie, wie lang die Kanten sein müssen, wenn die Spitze der Leiter 2,60 m über dem Erdboden liegen soll. ⓧ

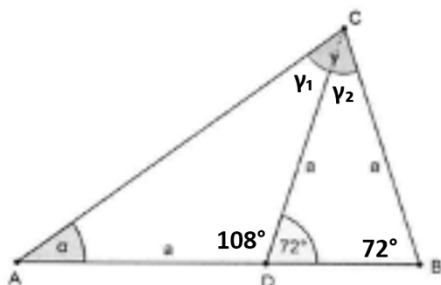


Lösungen zu den Aufgaben:

1.0

	1.1	1.2	1.3
α	57°	27°	42°
β	57°	27°	42°
γ	66°	126°	96°

2



$$180^\circ - 108^\circ = 72^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ = \gamma_1$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$$

3.1 Es gibt kein solches Dreieck, weil dann die Innenwinkelsumme kleiner als 180° wäre.

3.2 Es gibt kein solches Dreieck, weil dann die Innenwinkelsumme größer als 180° wäre.

3.3 Es gibt ein solches Dreieck, es wäre ein gleichseitiges Dreieck.

4.1 Gleichschenkliges Dreieck mit der Basis a.

4.2 Gleichseitiges Dreieck.

4.3 Rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c.

4.4 Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse a.

4.5 Gleichschenkliges Dreieck mit der Basis b.

4.6 Gleichseitiges Dreieck.

5.0

	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
a	4 cm	5 m	24 cm	4 dm	8 cm	$\sqrt{300}$ m
b	3 cm	12 m	7 cm	5 dm	6 cm	10 m
c	5 cm	13 m	25 cm	$\sqrt{41}$ dm	10 cm	20 m

6

$$(3,50)^2 + x^2 = (12,50)^2 \Rightarrow x^2 = (12,50)^2 - (3,50)^2 = 144 \Rightarrow x = 12$$

Die Leiter reicht 12 m hinauf.

7

$$(8,8)^2 + x^2 = (11,2)^2 \Rightarrow x^2 = (11,2)^2 - (8,8)^2 = 48 \Rightarrow x = \sqrt{48}$$

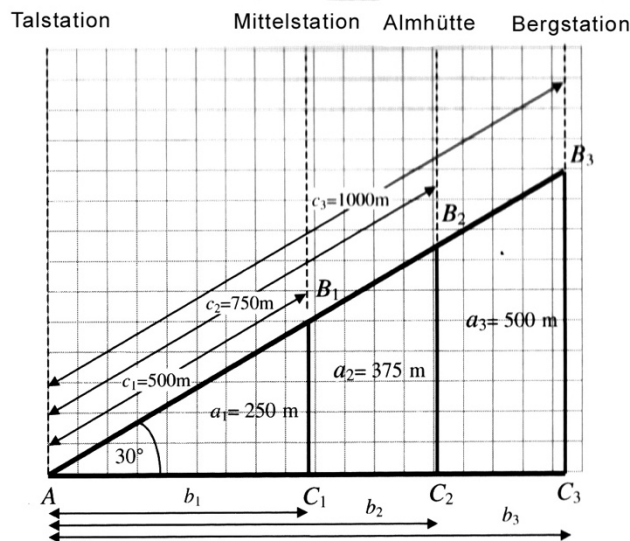
Der Baum ist etwa 6,93 m hoch.

8

$$(2,6)^2 + (1,1)^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 7,97 \Rightarrow x = \sqrt{7,97}$$

Die Kanten der Leiter sind etwa 2,82 m lang.

3. Sinus, Kosinus und Tangens in rechtwinkligen Dreiecken



Es gilt: $\frac{a_1}{c_1} = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}$ $\frac{a_2}{c_2} = \frac{375}{750} = \frac{1}{2}$ $\frac{a_3}{c_3} = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$

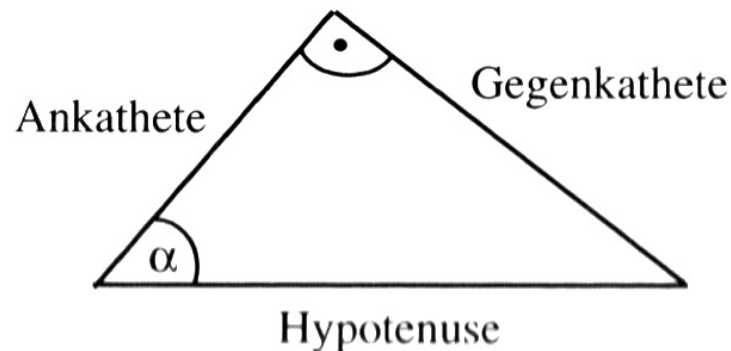
Folgerungen:

- 1) Die Längenverhältnisse der entsprechenden Seiten in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken sind gleich.

Der Wert des Verhältnisses hängt nur vom gemeinsamen Winkel (hier 30°) ab.

- 2) Entsprechend stimmen auch die Quotienten $\frac{b_1}{c_1}, \frac{b_2}{c_2}, \frac{b_3}{c_3}$ bzw. $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$ überein.

Man gibt im rechtwinkligen Dreieck diesen zu einem Winkel gehörenden festen Längenverhältnissen eigene Namen.

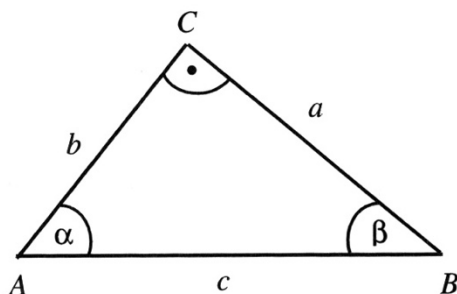


Es gilt:

$$\sin \alpha = \frac{\text{(Länge der) Gegenkathete zu } \alpha}{\text{(Länge der) Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha} = \frac{a}{b}$$

Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen



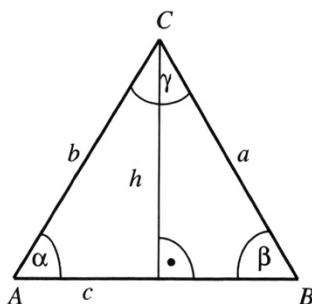
$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$$

$$\sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c} = \cos \alpha$$

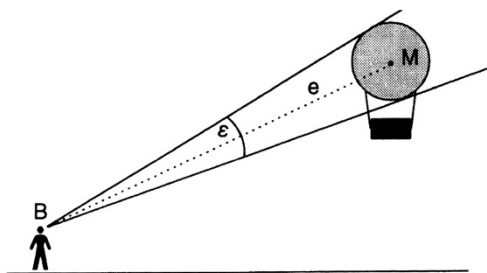
$$\cos \beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a}{c} = \sin \alpha$$

Aufgaben:

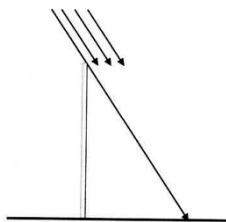
- 1 Berechnen Sie die fehlenden Stücke des folgenden Dreiecks ($a = b$), wenn $a = 35\text{m}$ und $\gamma = 50^\circ$. 



- 2 In einem bei C rechtwinkligen Dreieck sind $\alpha = 40^\circ$ und $b = 4,8\text{ cm}$ gegeben. Berechnen Sie den Winkel β und die Seiten a und c . 
- 3 In einem bei C rechtwinkligen Dreieck sind $a = 3,5\text{ cm}$ und $b = 4,1\text{ cm}$ gegeben. Berechnen Sie α , β und die Hypotenuse c . 
- 4 In einem bei C rechtwinkligen Dreieck sind $\beta = 50^\circ$ und $c = 6\text{ cm}$ gegeben. Berechnen Sie den Winkel α und die Katheten a und b . 
- 5 Bestimmen Sie, wie hoch ein Drachen steht, wenn die gespannte Schnur von 50 m Länge einen Winkel von 52° mit dem Erdboden bildet. 
- 6 Ein Ballon mit dem Durchmesser 20 m wird unter einem Sehwinkel $\varepsilon = 0,4^\circ$ beobachtet (siehe untenstehende Skizze). Berechnen Sie die Entfernung e des Ballons vom Beobachter B. 



- 7 Eine 3 m hohe Stange wirft auf waagrechttem Erdboden einen Schatten von 2,20 m Länge.
Bestimmen Sie, unter welchem Winkel die Sonnenstrahlen auf den Boden treffen. 



- 8 Die Spitze eines Baumes erscheint aus 25 m Entfernung unter einem Winkel von 42° .
Ermitteln Sie, wie hoch der Baum ist. 
- 9 Betrachten Sie das untenstehende Verkehrsschild. 



- 9.1 Erläutern Sie die Angaben auf dem Schild.
- 9.2 Berechnen Sie den Steigungswinkel.
- 9.3 Ermitteln Sie, wie viele Meter der Höhenunterschied auf einer Strecke von 800 m beträgt (bei gleichbleibender Steigung).

Lösungen zu den Aufgaben:

1

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 180^\circ - \gamma \Rightarrow \alpha = 65^\circ = \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{c_1}{b} \Rightarrow c_1 = \cos \alpha \cdot b = \cos 65^\circ \cdot 35 \approx 14,79 \text{ cm} \Rightarrow c \approx 29,58 \text{ cm}$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = \sin 65^\circ \cdot 35 \approx 31,72 \text{ cm}$$

2

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{4,8}{\cos(40^\circ)} \approx 6,27 \text{ cm}$$

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{6,27^2 - 4,8^2} \approx 4,03 \text{ cm}$$

3

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{3,5^2 + 4,1^2} \approx 5,39 \text{ cm}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{3,5}{5,39} \approx 0,64935 \Rightarrow \alpha \approx 40,49^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 40,49^\circ = 49,51^\circ$$

4

$$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos \beta = 6 \cdot \cos(50^\circ) \approx 3,86 \text{ cm}$$

$$\sin \beta = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin \beta = 6 \cdot \sin(50^\circ) \approx 4,60 \text{ cm}$$

$$5 \quad \sin 52^\circ = \frac{h}{50} \Rightarrow h = \sin 52^\circ \cdot 50 \approx 39,4 \text{ m}$$

$$6 \quad \tan \frac{\epsilon}{2} = \frac{10}{e} \Rightarrow e = \frac{10}{\tan 0,2} \approx 2864,78 \text{ m}$$

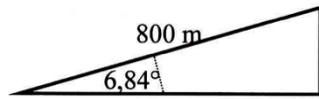
$$7 \quad \tan \alpha = \frac{3}{2,2} = \frac{15}{11} \Rightarrow \alpha \approx 53,75^\circ$$

$$8 \quad \tan(42^\circ) = \frac{h}{25} \Rightarrow h = 25 \cdot \tan(42^\circ) \approx 22,51 \text{ m}$$

9.1 Die Angabe bedeutet eine Steigung von 12 %.

$$9.2 \quad \tan \alpha = 0,12 \Rightarrow \alpha \approx 6,84^\circ$$

9.3



$$\sin(6,84^\circ) = \frac{x}{800} \Rightarrow x = 800 \cdot \sin(6,84^\circ) \approx 95,28 \text{ m}$$