

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel:

Eine Firma stellt drei verschiedene Produkte A, B und C her. Die Produkte durchlaufen während ihrer Herstellung drei verschiedene Werkstätten, eine Schreiner-, eine Schlosser- und eine Kunststoffwerkstatt. Dabei wird zur Herstellung eines Stücks dieser Produkte jeweils eine bestimmte Anzahl von Arbeitsstunden in den einzelnen Werkstätten benötigt:

	A	B	C
Schreinerei	6	2	0
Schlosserei	4	3	3
Kunststoff	0	1	4

Es sollen nun 4 Stück des Produkts A, 3 Stück des Produkts B und 1 Stück des Produkts C hergestellt werden.

Bestimmen Sie, wie viele Arbeitsstunden in den einzelnen Werkstätten benötigt werden.

Schreinerwerkstatt: $4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 30$ Arbeitsstunden

Schlosserwerkstatt: $4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 28$ Arbeitsstunden

Kunststoffwerkstatt: $4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 7$ Arbeitsstunden

Bestimmen Sie nun, wie viel Stück der Werkstücke A, B und C hergestellt werden können, wenn in der Schreinerwerkstatt 22 Stunden, in der Schlosserwerkstatt 33 Stunden und in der Kunststoffwerkstatt 22 Stunden benötigt werden.

$$(I) \quad 6x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 22$$

$$(II) \quad 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 33$$

$$(III) \quad 0x_1 + x_2 + 4x_3 = 22$$

"Lineares Gleichungssystem"

Beispiel:

$$(I) \quad 6x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 22$$

$$(II) \quad 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 33$$

$$(III) \quad 0x_1 + x_2 + 4x_3 = 22$$

Lösung dieses linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus:

Koeffizientenmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A/b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 4 & 3 & 3 & 33 \\ 0 & 1 & 4 & 22 \end{array} \right)$$

Ziel: Dreiecksform der Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right) \quad * \text{ sind reelle Zahlen}$$

1. Schritt: In der ersten Spalte muss statt 4 eine Null stehen

$$4 \cdot (I) - 6 \cdot (II): \quad 0 \quad -10 \quad -18 \quad | \quad -110$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & -10 & -18 & -110 \\ 0 & 1 & 4 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 5 & 9 & 55 \\ 0 & 1 & 4 & 22 \end{array} \right)$$

2. Schritt: In der zweiten Spalte muss statt 1 eine Null stehen

$$5 \cdot (III) - (II): \quad 0 \quad 0 \quad 11 \quad | \quad 55$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 5 & 9 & 55 \\ 0 & 0 & 11 & 55 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 5 & 9 & 55 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

3. Schritt: Berechnen der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$(III) \Rightarrow x_3 = 5$$

$$(II) \Rightarrow 5x_2 + 9x_3 = 55 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$(I) \Rightarrow 6x_1 + 2x_2 = 22 \Rightarrow x_1 = 3$$

$\Rightarrow (3/2/5)$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

Allgemeines lineares Gleichungssystem:

$$(I) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$(II) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$(III)$$

$$(IV)$$

:

:

$$(m) \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

m Gleichungen für n Unbekannte (m – n – System)

Es gilt:

(1) Ist $(b_1, b_2, \dots, b_m) = (0, 0, \dots, 0)$, so heißt das lineare Gleichungssystem homogen, sonst inhomogen.

(2) Ist $m > n$ ($m < n$), so heißt das lineare Gleichungssystem überbestimmt (unterbestimmt).



Aufgaben:

1

(I) $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$

(II) $x_1 + x_2 + x_3 = -1$

(III) $5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$

2

(I) $x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$

(II) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3$

(III) $4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5$

3

(I) $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$

(II) $-x_1 - 5x_2 - 5x_3 = 0$

4

(I) $x_1 - 7x_2 = 22$

(II) $3x_1 + 5x_2 = -12$

(III) $3x_1 + 6x_2 = 8$

Lösungen:

1

$$\begin{array}{l}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2 \cdot \text{(II)} - \text{(I)} \\ 5 \cdot \text{(I)} - 2 \cdot \text{(III)} \end{array} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 17 & 1 & -2 \end{array} \right) \end{array} \right) \\ \\ \underline{17 \cdot \text{(III)} + \text{(II)}} \begin{array}{l} \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 18 & -36 \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\text{(III)} \Rightarrow 18x_3 = -36 \Rightarrow x_3 = -2$$

$$\text{(II)} \Rightarrow -x_2 + x_3 = -2 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\text{(I)} \Rightarrow 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$\Rightarrow (1/0/-2)$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

2

$$\begin{array}{l}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} 2 \cdot \text{(I)} - \text{(II)} \\ 4 \cdot \text{(I)} - \text{(III)} \end{array} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 5 & -1 \\ \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 5 & -1 \end{array} \right) \end{array} \right) \\ \\ \underline{\text{(II)} + \text{(III)}} \begin{array}{l} \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 5 & -1 \\ \text{(III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\text{(III)} \Rightarrow 0x_3 = 0 \Rightarrow x_3 \text{ beliebig z.B. } x_3 = z$$

$$\text{(II)} \Rightarrow -5x_2 + 5x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{5} + z$$

$$\text{(I)} \Rightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{6}{5} - z$$

$\Rightarrow (\frac{6}{5} - z / \frac{1}{5} + z / z)$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS)

$$\Rightarrow \text{IL} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} / \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

3

$$\begin{array}{l}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{(I)+(II)}} \text{(I)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & 1 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\text{(II)} \Rightarrow -7x_2 - 4x_3 = 1 \Rightarrow x_3 \text{ beliebig z.B. } x_3 = z \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{7} - \frac{4}{7}z$$

$$\text{(I)} \Rightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{7} - \frac{15}{7}z$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{7} - \frac{4}{7}z / \frac{5}{7} - \frac{15}{7}z / z \right) \text{ ist Lösung des LGS}$$

4

$$\begin{array}{l}
 \text{(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -7 & 22 \\ 3 & 5 & -12 \\ 3 & 6 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{3 \cdot \text{(I)} - \text{(III)}} \text{(I)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -7 & 22 \\ 3 & 5 & -12 \\ 0 & -27 & 58 \end{array} \right) \\
 \text{(II)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -7 & 22 \\ 3 & 5 & -12 \\ 3 & 6 & 8 \end{array} \right) \\
 \text{(III)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -7 & 22 \\ 3 & 5 & -12 \\ 3 & 6 & 8 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\text{(III)} \Rightarrow -27x_2 = 58 \Rightarrow x_2 = -\frac{58}{27}$$

$$\text{(II)} \Rightarrow 3x_1 + 5x_2 = -12 \Rightarrow x_1 = -\frac{34}{81}$$

$$\text{Überprüfen mit (I): } x_1 - 7x_2 = 22 \Rightarrow -\frac{34}{81} - 7 \cdot \left(-\frac{58}{27}\right) = 22 \Rightarrow \frac{1181}{81} = 22 \text{ (f)}$$

$$\Rightarrow \text{IL} = \emptyset$$