Kombinatorik

1. Das allgemeine Zählprinzip

Beispiele:

1 Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für Lukas, sich anzuziehen, wenn drei Hosen, vier Oberteile und zwei Mützen zur Verfügung stehen und er auf jeden Fall eine Mütze tragen möchte.

$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten

2 Für die Erstellung eines Serienbriefes an 30 Personen gibt es 16 mögliche Vorlagentexte und die Papiersorten „einfach“, „edel“ und „Pergament“.
Berechnen Sie, wie viele verschiedene Briefe möglich sind.

$30 \cdot 16 \cdot 3 = 1440$ verschiedene Briefe

3.0 Nummernschilder in München bestehen aus zwei Buchstaben von A bis Z und drei- oder vierstelligen Zahlen.
Bestimmen Sie die Anzahl der theoretisch möglichen Nummernschilder mit

3.1 dreistelligen Zahlen.

$26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 608400$ Nummernschilder

3.2 vierstelligen Zahlen, falls Umlaute erlaubt wären.

$29 \cdot 29 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 7569000$ Nummernschilder

> Allgemeines Zählprinzip:
>
> Gegeben sei ein Vorgang, der in m kleinere Schritte zerlegt werden kann.
> Der 1. Schritt sei auf n_1 verschiedene Arten durchführbar, der 2. Schritt auf n_2 verschiedene Arten usw. Dann ergeben sich für die Durchführung des Gesamtvorganges $n_1 \cdot n_2 \cdot ..... \cdot n_m$ Möglichkeiten.

Jochen Weber

2.0 Geordnete Stichproben (Variationen)

2.1 Variation mit Wiederholung

Beispiele:

1 Um ihr neues Fahrrad vor Diebstahl zu schützen, will sich Julia ein möglichst sicheres Zahlenschloss kaufen. Sie hat die Wahl zwischen zwei Schlössern. Schloss A besitzt drei Rädchen, an denen die Ziffern zwischen 0 und 9 eingestellt werden können. Schloss B besitzt fünf Rädchen, allerdings lassen sich hier nur Zahlen von 1 bis 6 einstellen. Raten Sie Julia zu einem der beiden Schlösser und begründen Sie Ihre Wahl.

.

Schloss A: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ Möglichkeiten

Schloss B: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5 = 7776$ Möglichkeiten

Man sollte Julia Schloss B empfehlen, weil es deutlich mehr Einstellmöglichkeiten hat.

2 Bei einem Multiple-Choice-Test gibt es jeweils vier Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist.
Bestimmen Sie die Anzahl der Antwortkombinationen bei sieben Fragen.

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^7 = 16384$ Antwortkombinationen

3 Ein Würfel wird viermal geworfen.
Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Würfelergebnisse, die insgesamt auftreten können.

$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ Würfelergebnisse

Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge (Variation mit Wiederholung)

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden nacheinander k Kugeln mit Berücksichtigung
der Reihenfolge und mit Zurücklegen gezogen.
Dafür gibt es $n \cdot n \cdot n \cdot .... \cdot n = n^k$ verschiedene Ergebnisse.

2.2 Variation ohne Wiederholung

Beispiele:

1 Für einen Staffellauf muss ein Trainer aus sechs geeigneten Läufern vier Teilnehmer auswählen.
Es muss dabei von ihm auch angegeben werden, in welcher Reihenfolge die Läufer starten.
Ermitteln Sie die Anzahl der möglichen Startaufstellungen.

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ Möglichkeiten

2 In einer Klasse mit 22 Schülern soll der 1. und 2. Klassensprecher gewählt werden.
Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Wahlausgänge.

$22 \cdot 21 = 462$ mögliche Wahlausgänge

3 An einer Haltestelle steigen fünf Fahrgäste in einen Bus ein. Es sind noch 12 Plätze frei.
Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, wie sich die Fahrgäste auf die freien Plätze verteilen können.

$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040$ Möglichkeiten

4 Am Anfang des Schuljahres müssen sich die 24 Schüler einer Klasse auf 24 freie Plätze verteilen.
Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Sitzordnungen.

$24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = 24! \approx 6{,}20 \cdot 10^{23}$ Sitzordnungen

5 Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, fünf verschiedenfarbige Bauklötze aufeinander zu stapeln.

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ Möglichkeiten

6 Zur Dekoration eines Blumenladens sollen im Schaufenster acht verschiedene Blumenvasen nebeneinander aufgestellt werde.
Ermitteln Sie hierzu die Anzahl der Möglichkeiten.

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40320$ Möglichkeiten

Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge (Variation ohne Wiederholung)

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden nacheinander k Kugeln mit Berücksichtigung
der Reihenfolge und ohne Zurücklegen gezogen.
Dafür gibt es $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot.....\cdot(n-k+2)\cdot(n-k+1)$ verschiedene Ergebnisse.

Permutationen

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden nacheinander alle Kugeln mit Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen.
Dafür gibt es $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot2\cdot1=n!$ verschiedene Ergebnisse.

3 Ungeordnete Stichproben (Kombinationen)

Beispiele:

1 Lisa möchte für einen Spieleabend von ihren acht Lieblingsspielen drei auswählen. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten von den acht Spielen drei auszuwählen.

$$\binom{8}{3} = 56 \text{ Möglichkeiten}$$

2 Beim Lotto werden von 49 nummerierten Kugeln sechs verschiedene ausgewählt. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Tipps.

$$\binom{49}{6} = 13983816 \text{ Möglichkeiten}$$

3 Bestimmen Sie, auf wie viele Arten man die Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI anordnen kann, wenn jeweils alle Buchstaben verwendet werden sollen.

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1!} = 34650 \text{ Möglichkeiten}$$

4 Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, von sechs gezogenen Lottozahlen vier richtig zu tippen.

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 15 \cdot 903 = 13545 \text{ Möglichkeiten}$$

Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge (Kombination ohne Wiederholung)

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden nacheinander k Kugeln ohne Berücksichtigung
der Reihenfolge und ohne Zurücklegen gezogen.

Dafür gibt es $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ verschiedene Ergebnisse.