

Zufallsgrößen

Definition:

Eine Funktion X , die jedem Ergebnis ω eines Ergebnisraumes Ω eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet, heißt Zufallsgröße X auf Ω .

$$X: \omega \mapsto X(\omega) \quad D_X = \Omega$$

Beispiele:

1. Zweimaliges Werfen eines Würfels. Die Zufallsgröße X soll die Augensumme sein.

ω	11	12,21	13,31, 22	14,41,23, 32	15,51,24, 42,33	16,61,25, 52,34,43	26,62,35, 53,44	36,63, 45,54	46,64, 55	56,65	66
$X(\omega)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

2. Julia und Alex vereinbaren folgende Wette: Julia wirft dreimal nacheinander eine Münze. Erscheint dreimal Wappen oder dreimal Zahl, erhält sie von Alex 4 €. Wenn die Münzen in der Reihenfolge W, W, Z bzw. Z, Z, W fallen, muss Julia 2 € an Alex zahlen. In allen anderen Fällen muss sie nur 1 € abgeben.

Die Zufallsgröße X ist der Gewinn bzw. Verlust von Julia.

ω	WWZ, ZZW	WZW, ZWW, ZWZ, WZZ	WWW, ZZZ
$X(\omega)$	-2	-1	4

3. In einer Firma stehen drei voneinander unabhängig arbeitende Maschinen. Man geht davon aus, dass eine Maschine während eines Tages höchstens einmal ausfällt. Durch den Ausfall der einzelnen Maschinen entsteht ein Verlust von 300 € bei Maschine 1 und 2 und ein Verlust von 600 € bei Maschine 3. Die Zufallsgröße X soll die Verluste durch den Ausfall der Maschinen beschreiben.

ω	111	011,101	110,001	100	000
$X(\omega)$	0	300	600	900	1200

4. Ein Spieler setzt beim Roulette 1 € auf 1. Dutzend. Gewinnt er, bekommt er 3 € zurück. Die Zufallsgröße X beschreibt den Gewinn bei einem Spiel.

ω	1,2,3,...,12	0,13,14,...,36
$X(\omega)$	-1	2

Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsgrößen

Definition:

Die Funktion $P: \mathbb{R} \rightarrow [0;1]$, die jedem Zufallswert x die Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .

Beispiele:

1. Zweimaliges Werfen eines Würfels. Die Zufallsgröße X soll die Augensumme sein.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. Julia und Alex vereinbaren folgende Wette: Julia wirft dreimal nacheinander eine Münze. Erscheint dreimal Wappen oder dreimal Zahl, erhält sie von Alex 4 €. Wenn die Münzen in der Reihenfolge W, W, Z bzw. Z, Z, W fallen, muss Julia 2 € an Alex zahlen. In allen anderen Fällen muss sie nur 1 € abgeben.

Die Zufallsgröße X ist der Gewinn bzw. Verlust von Julia.

x	-2	-1	4
$P(X = x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

3. In einer Firma stehen drei voneinander unabhängig arbeitende Maschinen. Man geht davon aus, dass eine Maschine während eines Tages höchstens einmal ausfällt. Durch den Ausfall der einzelnen Maschinen entsteht ein Verlust von 300 € bei Maschine 1 und 2 und ein Verlust von 600 € bei Maschine 3. Die Zufallsgröße X soll die Verluste durch den Ausfall der Maschinen beschreiben.

x	0	300	600	900	1200
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

4. Ein Spieler setzt beim Roulette 1 € auf 1. Dutzend. Gewinnt er, bekommt er 3 € zurück. Die Zufallsgröße X beschreibt den Gewinn bei einem Spiel.

x	-1	2
$P(X = x)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$

Bemerkung:

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten $P(X = x)$ muss immer 1 ergeben.

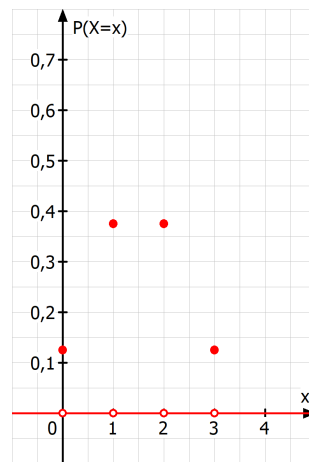
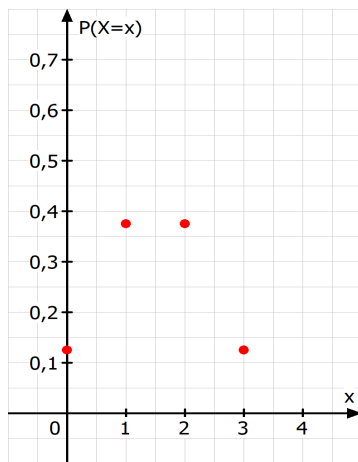
Graphische Darstellung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel:

Eine Münze wird dreimal hintereinander geworfen und die Zufallsgröße X soll dabei die Anzahl der Wappen angeben. Es ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

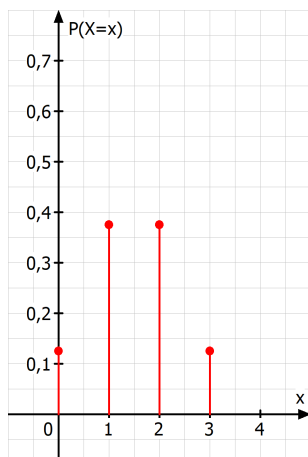
x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

1. Graph: Die Darstellung als Funktionsgraph ist in der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht gebräuchlich

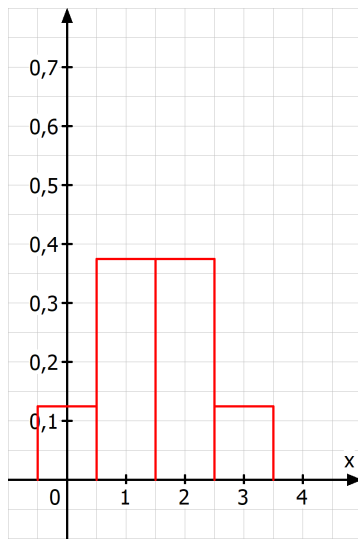


Graph der Wahrscheinlichkeitsverteilung für $x \in \mathbb{R}$

2. Stabdiagramm:



3. Histogramm:



Bemerkung:

Der Flächeninhalt eines Rechtecks entspricht der entsprechenden Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$, d.h. wenn für die Breite des Rechtecks nicht 1 LE wählt, dann muss die Höhe des Rechtecks entsprechend angepasst werden (z.B. halbe Breite, doppelte Höhe etc.).